Bölüm 15

DOĞAL SAYILAR

15.1 DOĞAL SAYILARIN KURULUŞU

Tarihte hemen her toplum *sayma* eylemini yapabilmiştir. Dillere göre, farklı adlar almış; gösterilmelerinde farklı simgeler kullanılmış olsa da, sayma eyleminde kullanılan araç hep aynıdır:

$$\mathbb{N}^+ = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\} \tag{1}$$

Bu kümeye, *Sayma Sayıları Kümesi* diyoruz. Buna 0 sayısını katarak elde ettiğimiz,

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\} \tag{2}$$

kümesine *Doğal Sayılar Kümesi*, denilir. Bu kümenin her bir öğesi bir *doğal sayı*'dır.

Matematikteki yapıların çoğu, sayı kümelerinin sağladığı özeliklerin, soyut kümelere taşınmasıyla elde edilir. Sayı kümeleri de Doğal Sayılar Kümesi'nden üretilebilir. Dolayısıyla, *Doğal Sayılar Kümesi*, matematikte önemli bir role sahiptir.

Doğal sayılar kümesi ile bu küme üzerindeki işlemler ve bağıntılar, değişik aksiyomatik yöntemlerle kurulabilir.

Matematiksel sistemlerin köşe taşlarından birisi ve belki de en önemlisi doğal sayılardır. Henüz okul çağına bile gelmeden öğrenmiş olduğumuz "*sayma eylemi*" nde kullandığımız araç budur. $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ simgeleriyle gösterdiğimiz bu sayıları, her normal insanın kendi sezgileriyle iyice algılamış olduğu kuşkusuzdur. Hattâ, öğrenimin ilk yıllarında doğal sayılar üzerindeki aritmetiğin bile öğrenciye eksiksiz öğretilebildiği bir gerçektir. Ancak bütün bunlar *sezgiye dayalı* olduğu için matematiksel olarak belirsiz kavramlardır.

Bu bölümde doğal sayıları belirsiz hiçbir kavrama dayanmaksızın tanımlayacağız. Bu iş için değişik yöntemler kullanılabilir. Bunların ilki 1899 yılında İtalyan matematikçi *Guiseppe Peano*'nun izlediği yöntemdir. Bu yöntemde Peano, bugün kendi adıyla anılan aksiyomlarla doğal sayıları belirlemiştir. Biz, burada, küme kavramına dayalı bir yöntemi kullanacağız. Hemen belirtelim ki, doğal sayıların hangi yöntemle belirlendiği önemli değildir. Çünkü, doğal sayıları öyle belirleyeceğiz ki bu yeni kavram ile daha önceden sezgiyle algıladığımız doğal sayı kavramı arasında bir fark olmayacaktır. Bunu, şuna benzetebiliriz: Diyelim ki uzunluk birimi olarak metreyi belirlemek istiyoruz. Uzunluk birimi olarak *metre*, metreyi temsil eden aracın iridyumlu platinden mi, plastikten mi. ağaçtan mı,... yapıldığına bağlı olmayan bir kavramdır. Benzer olarak, doğal sayıları, onu tanımlamak için kullandığımız nesneler ya da kümelerden bağımsız bir kavram olarak ortaya koyacağız.

Burada doğal sayıları birer küme olarak tanımlayacağız, ileride, nicelik sayılarını öğrendikten sonra, doğal sayıları sonlu kümelerin nicelik sayıları olarak belirleyeceğiz. Tabii, günlük yaşantımızda ise *doğal sayılar,* "*sayma sayıları*" dır.

Boş ($\emptyset$) kümeyi temsil etmek üzere aşağıdaki kümeleri, kısaca, karşılarındaki simgeler (rakamlar) ile gösterelim:

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{\emptyset\} \\
&2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \qquad (15.1) \\
&\vdots \qquad (15.2)
\end{aligned}$$

Dikkat edersek, bu kümelerden herbirisi, kendinden önce gelen kümelerin hepsini birer öğe olarak içermektedir. Bu şekilde ard arda istediğimiz kadar küme kurabiliriz. Bu kümelerin kuruluşu sonsuz zaman devam ettirilebilir; yani hiç bir zaman bitirilemez. (15.1) sistemini daha kısa olarak

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{0\} \\
&2 = \{0, 1\} \\
&3 = \{0, 1, 2\} \\
&4 = \{0, 1, 2, 3\} \\
&\vdots \qquad (15.3) \\
&r = \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde de yazabiliriz. Şimdi bu kümeleri daha basit olarak ifade edebilmek için aşağıdaki kavramı vereceğiz.

Tanım 15.1.1. Herhangi bir A kümesinin A^+ ile göstereceğimiz ardılını

$$A^+ = A \cup \{A\} \tag{15.4}$$

eşitliği ile tanımlayacağız.

Bu tanım uyarınca, $A = \emptyset$ dersek (15.3) sistemini

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= 0^+ \\
2 &= 1^+ \\
3 &= 2^+ \\
4 &= 3^+ \\
&\vdots \\
r &= (r-1)^+ \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{15.5}$$

şeklinde yazabileceğimiz açıktır.

Bu yolla tanımladığımız kümelerin herbirisine bir *doğal sayı* diyeceğiz. (15.1) sisteminde her yeni kümeyi, kendinden öncekileri öğeleri kabul ederek kuruyorduk. Bu ardışma yöntemiyle $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ simgeleriyle temsil ettiğimiz ve adına *doğal sayı* dediğimiz her kümeyi kurabiliriz. Ancak burada önemli bir soruyla karşılaşıyoruz: Her doğal sayıyı belirleyen bir küme kurabiliyoruz, ama, acaba bütün doğal sayıları belirleyecek bir küme var mıdır? Daha açıkçası, öyle bir ω kümesi var mıdır ki, $\emptyset$ yi içersin ve ayrıca herhangi bir X kümesini bir öğe olarak içerdiğinde bunun X^+ ardışığını da bir öğe olarak içersin. Yukarıda açıkladığımız ardışma yöntemiyle böyle bir ω kümesini oluşturma olanağı olmadığı açıktır. Çünkü (15.1) sistemine ait her kümeyi kurmak için ardışma yöntemimizde er ya da geç sıra gelecektir. Ama (15.1) sisteminin bütün kümelerini içeren ω kümesini kurmak için ardışma yönteminde sıra hiç bir zaman gelmeyecektir; çünkü (15.1) sistemine ait kümelerin kuruluşu hiçbir zaman bitirilemeyecektir. Bu nedenle istediğimiz özeliklere sahip bir ω kümesinin varlığını bir aksiyom olarak alacağız. Konuyu biraz daha genelleştirmek için yeni bir kavram daha tanımlayalım.

Tanım 15.1.2. Aşağıdaki iki özeliğe sahip bir A kümesine *ardışan bir kümedir*, denilir:

(i) $\emptyset \in A$

(ii) $X \in A \Rightarrow X^+ \in A$

Ardışan bir kümenin bütün doğal sayıları içereceği apaçıktır. Artık böyle bir kümenin varlığını kabul etmek zamanı gelmiştir.

15.1.1 Sonsuzluk Aksiyomu

Aksiyom 15.1.1. *Ardışan bir küme vardır.*

15.1.2 Doğal Sayı

Ardışan bir kümenin bütün doğal sayıları içerdiğini söyledik ve ardışan (en az) bir kümenin varlığını da kabul ettik. Şimdi bütün doğal sayılar kümesini tanımlayabiliriz.

Tanım 15.1.3. Ardışan bütün kümelerin arakesitine doğal sayılar kümesi, denir.

Ardışan iki kümenin arakesitinin yine ardışan bir küme olacağı apaçıktır (bkz. 1.Problem). Giderek, ardışan kümelerden oluşan herhangi bir ailenin arakesitinin yine ardışan bir küme olacağı, dolayısıyla, özel olarak, ardışan bütün kümelerin arakesitinin de ardışan olduğu gösterilebilir (bkz. 2.Problem). Öyleyse, kapsama bağıntısına göre sıralanmış olmak üzere, *ardışan kümelerin en küçüğü doğal sayılar kümesidir.* Bu kümeyi, yukarıdan beri yazdığımız gibi ω simgesiyle temsil edeceğiz. (Pratik problemlerde ω yerine $\mathbb{N}$ simgesini kullanmayı tercih edeceğiz.)

15.1.3 Problemler

1. Ardışan iki kümenin arakesitinin yine ardışan bir küme olduğunu gösteriniz.

2. Ardışan kümelerden oluşan herhangi bir ailenin arakesitinin de yine ardışan bir küme olacağını gösteriniz.

15.2 DOĞAL SAYILARIN ÖZELİKLERİ

Bu kesimde, ω doğal sayılar kümesinin, *Peano aksiyomları* diye anılan beş beliti sağladığını göstereceğiz, ki bu özelikler, başlangıçta da söylediğimiz gibi, doğal sayıları tanımlamanın başka bir yoludur.

Teorem 15.2.1. *Her $n \in \omega$ için $n^+ \neq 0$ dır.*

İSPAT: Her n doğal sayısı için $n^+ = n \cup \{n\}$ olduğundan $n \in n^+$ dır. (bkz, (15.4)) Öyleyse n^+ kümesi boş değildir. Oysa 0 doğal sayısı boş küme olarak tanımlanmıştır (bkz, (15.5)). Demek ki $0 \neq n^+$ dır.

15.2.1 Sonlu Tümevarım İlkesi

Teorem 15.2.2. *Eğer $A \subset \omega$ alt kümesi için*

(i) $0 \in A$

(ii) $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

koşulları sağlanıyorsa, $A = \omega$ dır.

İSPAT: Teoremin söylediği şey şudur. Doğal sayıların bir alt kümesi ilk doğal sayıyı içeriyorsa ve ayrıca içerdiği her sayının ardılını (ardışığını) da içeriyorsa, o alt küme doğal sayılar kümesidir. Bu iki özeliğe sahip A kümesi ardışan bir kümedir (bkz. Tanım 15.1.2) ω doğal sayılar kümesi, ardışan her küme tarafından kapsandığından (bkz. Tanım 15.1.3). $\omega \subset A$ olacaktır. Oysa bize $A \subset \omega$ verilmiştir. Öyleyse $A = \omega$ dır.

Teorem 15.2.3. *m ile n herhangi iki doğal sayı olsun. Eğer $m \in n^+$ ise ya $m \in n$ ya da $m = n$ dir.*

İSPAT: Bunu simgelerle ifade edersek,

$$m \in n^+ \Rightarrow (m \in n) \vee (m = n) \tag{15.6}$$

olur.

$n^+ = n \cup \{n\}$ olduğuna göre $m \in n^+$ ise ya $m \in n$ ya da $m \in \{n\}$ dir. Oysa $\{n\}$ tek öğeli bir kümedir. Dolayısıyla, $m \in \{n\}$ olması için $m = n$ olması gerekli ve yeterlidir.

Tanım 15.2.1. A kümesinin her öğesi bir alt küme ise; yani $x \in A$ olduğunda $x \subset A$ oluyarsa, A kümesine ***geçişken*** bir kümedir denilir.

Teorem 15.2.4. *Her doğal sayı geçişkendir.*

İSPAT: ω doğal sayılar kümesinin geçişken bütün öğelerinin oluşturduğu kümeye A diyelim. *Tüme Varım İlkesini* kullanarak $\omega = A$ olduğunu göstereceğiz. Böylece, her doğal sayının geçişken olduğu gösterilmiş olacaktır. Bunun için `Teorem` 15.2.2 (i) ve (ii) koşullarının A kümesi tarafından sağlandığını göstermek yetecektir.

(i) $0 \in A$ dır. Çünkü $0 = \emptyset$ dir ve $\emptyset$ her kümeye aittir.

(ii) Şimdi, eğer $n \in A$ ise $n^+ \in A$ olacağını, yani n kümesi geçişken ise n^+ ardışığının da geçişken olacağını gösterelim. $m \in n^+$ ise ya $m \in n$ ya da $m = n$ dir (bkz. 15.2.3). Birinci hal varsa, yani $m \in n$ ise, n geçişken olduğundan $m \subset n$ olacaktır. Ayrıca $n \subset n^+$ olduğuna göre $m \subset n^+$ çıkar. İkinci hal varsa, yani $m = n$ ise, $n \subset n^+$ olduğundan $m \subset n^+$ çıkar. Ohalde n^+ geçişkendir. Demek ki $n \in A$ ise $n^+ \in A$ olması gerekiyor.

Teorem 15.2.5. *m ile n herhangi iki doğal sayı olsun. Eğer $m^+ = n^+$ ise $m = n$ dir.*

İSPAT: $m^+ = n^+$, $n \subset n^+$ olduğundan $n \in n^+ = m^+$ olacaktır, ki bu, `Teorem` 15.2.3 gereğince, ya $n \in m$ ya da $n = m$ olması demektir. Benzer yolla, $m \in m^+$ için ya $m \in n$ ya da $m = n$ olduğu çıkarılabilir. Eğer $m = n$ ise önerme doğru olur. Şimdi $m \neq n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n \in m$ ya da $m \in n$ olması gerektiğini gördük. Doğal sayılar geçişken olduğundan (bkz. `Teorem` 15.2.4), bu son özelikler $n \subset m$ ve $m \subset n$ olmasını gerektirir, ki buradan, $m = n$ çıkar.

Bu kesimin başında, ω doğal sayılar kümesinin *Peano Aksiyomlarını* sağladığını göstereceğimizi söylemiştik, ispatladığımız önermelerle bu işi yapmış durumdayız. Ancak, konuyu daha belirgin kılmak için, bu aksiyomları sıralamak yararlı olacaktır.

15.2.2 Peano Aksiyomları

Teorem 15.2.6. *Aşağıdaki özeliklere sahip bir ω kümesi vardır:*

P1. $0 \in \omega$

P2. $n \in \omega$ *ise* $n^+ \in \omega$

P3. $n \in \omega$ *ise* $n^+ \neq 0$

P4. ω *nın bir* A *alt kümesi aşağıdaki iki özeliğe sahipse* $A = \omega$ *dır:*

(i) $0 \in A$

(ii) $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

P5. $m, n \in \omega$ *ve* $n^+ = m^+$ *ise* $m = n$ *dir.*

İSPAT:

(P1., P2.): Doğal sayılar kümesi ardışan bir küme olduğundan istenen `Tanım` 15.1.2 den çıkar.

(P3.): Teorem 15.2.1 den çıkar.

(P4.): Teorem 15.2.2 den çıkar.

(P5.): Teorem 15.2.5 den çıkar.

15.2.3 Problemler

1. Bir W kümesinin geçişken olması için gerekli ve yeterli koşul, $B \in A$ ve $A \in W$ olduğunda $B \in W$ olmasıdır. Gösteriniz.

2. Geçişken iki kümenin bileşim ve arakesitlerinin de geçişken olduğunu gösteriniz.

3. A ile B herhangi iki küme olsun. Eğer $A = B$ ise $A^+ = B^+$ olduğunu gösteriniz.

4. Her n doğal sayısı için $n \notin n$ olduğunu gösteriniz.

5. m, n, r birer doğal sayı olduğuna göre aşağıdaki özeliklerin varlığını gösteriniz:

   (a) $n \neq n^+$
   (b) Eğer $m \in n$ ise $n \notin m$ dir.
   (c) Eğer $n \in m$ ve $m \in r$ ise $n \in r$ dir.
   (d) Eğer $m \in n$ ise $m^+ \subset n$ dir.

6. Eğer $A \in n$ ve $n \in \omega$ ise $A \in \omega$ olduğunu tüme varımla ispatlayınız. Buradan ω nın geçigken bir küme olduğu sonucunu çıkarınız.

7. Eğer $A^+ \in \omega$ ise $A \in \omega$ olacağını gösteriniz.

8. Hiçbir doğal sayının ardışan bir küme olamayacağını gösteriniz.

9. Bir doğal sayının, kendisine ait hiçbir öğenin bir alt kümesi olamayacağını gösteriniz.

10. Eğer $n \in \omega$ ise ya $n = 0$ olduğunu ya da $n = m$ olacak şekilde bir $m \in \omega$ varolduğunu gösteriniz.

15.3 DOĞAL SAYILARIN SIRALANMASI

Tanım 15.3.1. Doğal sayılar kümesi üzerinde $\leq$ simgesiyle göstereceğimiz bağıntıyı

$$m \leq n \Longleftrightarrow (m \in n) \vee (m = n) \tag{15.7}$$

diye tanımlayacak ve bunu "*m doğal sayısı, n doğal sayısından ya küçüktür ya da eşittir*" diye okuyacağız.

$m \leq n$ ile $n \geq m$ simgeleri eş anlamda kullanılacaktır.
Ayrıca $m < n$ bağıntısını

$$m < n \Longleftrightarrow (m \leq n) \wedge (m \neq n) \tag{15.8}$$

diye tanımlayacağız.

Bu kesimde $\leq$ bağıntısının doğal sayılar kümesi üzerinde bir *iyi sıralama bağıntısı* olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için, önce üç önerme söyleyeceğiz.

Önerme 15.3.1. *$\leq$ bağıntısı ω üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

İSPAT:

Bağıntı yansımalıdır (refleksif) Her $m \in \omega$ için $m = n$ dir. Öyleyse, (15.7) den $m \leq m$ yazabiliriz.

Bağıntı geçişkendir $m, n, p \in \omega$ olsun. $m \leq n$ ve $n \leq p$ olduğunu varsayalım. Dört mümkün hal vardır:

$$\begin{aligned}
(m \in n) \wedge (n \in p) &\Rightarrow ((m \in n) \wedge (n \subset p) \Rightarrow (m \in p)) \\
(m \in n) \wedge (n = p) &\Rightarrow m \in p \\
(m = n) \wedge (n \in p) &\Rightarrow m \in p \\
(m = n) \wedge (n = p) &\Rightarrow m = p
\end{aligned}$$

Bu dört halin her birisi için (15.7) uyarınca $m \leq p$ olacaktır.

Bağıntı antisimetriktir $m \leq n$ ve $n \leq m$ olduğunu varsayalım. (15.7) uyarınca ya $m = n$ ya da $m \leq n$ ve $n \in m$ olacaktır. İkinci hal varsa $m \subset n$ ve $n \subset m$ çıkar. Her doğal sayı geçişken olduğundan (bkz. `Teorem` 15.2.4), bu sonuncusu $m = n$ olmasını gerektirir.

Önerme 15.3.2. *Her $m \in \omega$ için $0 \leq m$ dir.*

İSPAT:

$$M = \{m \mid m \in \omega,\, 0 \leq m\}$$

kümesini düşünelim. *Sonlu Tüme Varım İlkesi* (bkz. `Teorem` 15.2.2) uyarınca $M = \omega$ olduğunu göstereceğiz. $\leq$ bağıntısı yansımalı olduğundan $0 \leq 0$ yazabiliriz. Dolayısıyla $0 \in M$ dir. Şimdi herhangi bir $m \in M$ seçelim. Varsayımdan $0 \leq m$ olacaktır. $m \in m^+$ olduğundan $m \leq m^+$ yazabiliriz. Böylece $0 \leq m$ ve $m \leq m^+$ elde edilmiş oldu. $\leq$ bağıntısı geçişken olduğu için

$$(0 \leq m) \wedge (m \leq m^+) \Rightarrow (0 \leq m^+)$$

olacaktır. O halde $m^+ \in M$ dir. Sonlu Tüme Varım İlkesine göre $M = \omega$ olur.

Önerme 15.3.3. *$n < m$ ise $n^+ \leq m$ dir.*

İSPAT: Herhangi bir n doğal sayısını sabit seçelim ve

$$M_n = \{m \in \omega \mid (n < m) \Rightarrow (n^+ \leq m)\}$$

kümesmi tanımlayalım. Sonlu Tüme Varım İlkesine göre $M_n = \omega$ olduğunu göstereceğiz. Tanımdan

$$\begin{aligned} m \notin M_n &\Leftrightarrow (n < m) \wedge (\neg(n^+ \leq m)) \\ &\Leftrightarrow (n \in m) \wedge (\neg(n^+ \leq m)) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan, özel olarak,

$$0 \notin M_n \Leftrightarrow n \in 0 \wedge \neg(n^+ \leq 0)$$

çıkar, ki bu olanaksızdır. Öyleyse $0 \in M_n$ olmalıdır. Şimdi herhangi bir $m \in M_n$ seçelim. Tanımdan $n < m \Rightarrow n^+ \leq m$ dir. $m^+ \in M_n$ olduğunu göstermek için

$$n < m^+ \Rightarrow n^+ \leq m \leq m^+$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğer $n < m^+$ ise; yani $n \in m^+$ ise, Teorem 15.2.3 gereğince, ya $n \in m$ dir ya da $n = m$ dir. Eğer $n = m$ ise $n^+ = m^+$ çıkar ve ispat biter. Eğer $n \in m$ ise; yani $n < m$ ise, kabulümüzden

$$n^+ \leq m < m^+$$

çıkar ve ispat biter.

Teorem 15.3.1. *Doğal sayılar kümesi $\leq$ bağıntısına göre iyi sıralıdır.*

İSPAT: Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Eğer $(\omega, \leq)$ sistemi iyi sıralı olmasaydı, boş olmayan ve en küçük öğesi var olmayan bir $A \subset \omega$ alt kümesi var olacaktı. Şimdi

$$M = \{n \in \omega \,|\, m \in A \Rightarrow n \leq m\}$$

kümesini tanımlayalım. Sonlu Tüme Varım İlkesiyle $M = \omega$ olduğunu göstereceğiz. `Önerme` 15.3.2 den $0 \in M$ yazabiliriz. Şimdi herhangi bir $n \in M$ seçelim. Tanımdan, her $m \in A$ için $n \leq m$ olacaktır. Eğer, herhangi bir $p \in A$ için $n = p$ ise p, A nın en küçük öğesi olur, ki bu kabulümüze aykırıdır. Öyleyse, her $m \in A$ için $n < m$ olacaktır. `Önerme` 15.3.3 den, her $m \in A$ için $n^+ \leq m$ yazabiliriz, ki bu $n^+ \in M$ olmasını gerektirir. Demek ki $M = \omega$ dır. Oysa $M \cap A = \emptyset$ tur ; çünkü A nın *en küçük öğesi* yoktur. Ohalde $A = \emptyset$ olmalıdır.

15.4 TAMSAYILAR

Doğal sayıları bu Bölümün başında kurmuştuk.[1] Bu bölümde doğal sayılardan hareketle tamsayılar kümesini oluşturacağız.

15.4.1 Tamsayıların Kuruluşu

Tamsayıların iki doğal sayının farkı (ya da toplamı) olarak çok farklı biçimlerde yazılabildiğini ilkokulda öğretirler. Örneğin, 3 tamsayısını

$$\begin{aligned} 3 &= -6-(-9) = -125-(-128) = -1-(-4) \\ &= 3-0 = 17-14 = 2+1 = 0+3 = 1735-1732 \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{15.9}$$

gibi çok değişik biçimlerde yazabiliriz. Tamsayıların kuruluşu bu basit ilişkiye dayanır. $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ olmak üzere, iyi bilinen

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c \tag{15.10}$$

bağıntısını düşünelim. Şimdi, tamsayıların ne olduğunu bilmediğimizi var sayıp, yukarıdaki (15.10) bağıntısının sol yanını unutalım. $a - b$ yerine (a, b) sıralı ikilisini ve $c - d$ yerine (c, d) sıralı ikilisini koyarak, bağıntıyı

$$(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \tag{15.11}$$

biçiminde yeniden yazalım. Bunun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 15.4.1. (15.11) bağıntısının denklik sınıfları kümesine tamayılar kümesi denilir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

[1] Doğal sayılar Peano aksiyomları ile de kurulabilir.

Demek ki, doğal sayılar kümesi biliniyorken, tamsayılar kümesini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerindeki (15.11) denklik bağıntısının denklik sınıfları olarak kurabiliyoruz. O nedenle, (15.9) biçiminde yazılan sayılar aynı denklik sınıfı içindedirler.

(15.11) denklik bağıntısının tanımladığı denklik sınıflarını

$$[(a,b)] = \{(x,y) \mid (a,b) \approx (x,y)\} \tag{15.12}$$

biçiminde gösterelim.

15.4.2 Tamsayıların Özelikleri

Önerme 15.4.1. *$a, b \in \mathbb{N}$ verildiğinde n doğal sayısı için $(a+n = b+n)$ olması $a = b$ olmasını gerektirir. Bunu simgelerle gösterelim:*

$$(n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow ((a+n = b+n) \Rightarrow (a = b)) \tag{15.13}$$

dir.

İSPAT: (15.13) özeliğinin her doğal n sayısı için sağlandığını göstermek istiyoruz.

$$A = \{n \mid ((a+n) = (b+n)) \Rightarrow (a = b),\ a, b \in \mathbb{N}\} \tag{15.14}$$

kümesini tanımlayalım. Sonlu tümevarım ilkesini kullanarak (bkz. `Teorem` 15.2.2) $A = \mathbb{N}$ olduğunu göstereceğiz. bunun için A nın ardışan bir küme olduğunu göstermeliyiz. Alışılmış simgeleri kullanmak amacıyla her n doğal sayısı için $n^+ = n+1$ yazacağız

(i) $a+0 = b+0 \Leftrightarrow a = b$ olduğundan $0 \in A$ dır. Ayrıca `Teorem` 15.2.5 uyarınca $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$ olduğunu; yani $(a+1 = b+1) \Rightarrow (a = b)$ biliyoruz. O halde $1 \in A$ dır.

(ii) $k \in A \Rightarrow (k+1) \in A$ olduğunu göstermeliyiz.

$0, 1, 2, \ldots, k \in A\,(k \geq 2$ olduğunu varsayalım. (15.14) özeliği her $c, d \in \mathbb{N}$ için sağlanır; yani

$$((c+k) = (d+k)) \Rightarrow (c = d)$$

olacaktır. Özel olarak $c = a+1$ ve $d = b+1$ alalım. O zaman

$$(((a+1)+k) = ((b+1)+k)) \Rightarrow (a+1) = (b+1)$$

olur. Bunu düzenlersek, $(k+1) \in A$ olduğunu görmek için aşağıdaki gerektirmelerin varlığını görmek yetecektir.

$$\begin{aligned} k \in A &\Longleftrightarrow (((a+1)+k) = ((b+1)+k)) \Rightarrow a = b) \\ &\Longleftrightarrow ((a+(k+1)) = (b+(k+1)) \Rightarrow a = b) \\ &\Longleftrightarrow (k+1) \in A \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 15.4.2. *$a, b \in \mathbb{N}$ verildiğinde n doğal sayısı için $(a+n < b+n)$ olması $a < b$ olmasını gerektirir. Bunu simgelerle gösterelim:*

$$(n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (a+n < b+n \Rightarrow a < b) \tag{15.15}$$

dir.

İSPAT: Yukarıdaki ispatta $=$ yerine $<$ konularak aynı ifadelerle ispat yapılabilir.

Tamsayılar kümesi üzerinde *toplama, çıkarma, çarpma, bölme* işlemleri (15.11) ile belirlenen denklik sınıfları yardımıyla tanımlanır. (Bunları yapmayı deneyiniz.)

15.5 RASYONEL SAYILAR

Tamsayılarda olduğu gibi rasyonel sayıların da

$$\ldots = \frac{-6}{-9} = \frac{-4}{-6} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{12}{18} = \ldots \tag{15.16}$$

$$\ldots = \frac{-12}{-15} = \frac{-8}{-10} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \ldots \tag{15.17}$$

gibi birden çok biçimde yazılabildiği ilkokuldan bilinir. Rasyonel sayıların kuruluşu da bu basit ilişkiye dayanır. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$, $d \neq 0$ olmak üzere, iyi bilinen

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \tag{15.18}$$

bağıntısını düşünelim. Şimdi, rasyonel sayıların ne olduğunu bilmediğimizi var sayıp, yukarıdaki (15.18) bağıntısının sol yanını unutalım. $\frac{a}{b}$ yerine (a, b) sıralı ikilisini ve $\frac{c}{d}$ yerine (c, d) sıralı ikilisini koyarak, bağıntıyı

$$(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \tag{15.19}$$

biçiminde yeniden yazalım. Bunun $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 15.5.1. (15.19) bağıntısının denklik sınıfları kümesine rasyonal sayılar kümesi denilir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Demek ki, tamsayılar kümesi biliniyorken, rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerindeki (15.19) denklik bağıntısının denklik sınıfları olarak kurabiliyoruz. O nedenle, (15.16), (15.17) denklik sınıflarıdır. *toplama, çıkarma, çarpma, bölme* işlemleri ile *sıralama bağıntısı*, (15.19) ile verilen denklik sınıfları kümesi üzerinde kolayca tanımlanır. (Bu tanımları yapınız.) Pratikte rasyonel sayılarla işlem yaparken, denklik sınıflarını değil, işleme giren her bir denklik sınıfından seçilecek birer temsilci öğeyi kullanırız. Örneğin, (15.16), (15.17) denklik sınıflarını toplarken, o sınıflardan rasgele birer temsilci seçerek

$$\frac{2}{3} + \frac{-8}{-10} = \frac{22}{15} \tag{15.20}$$

yazarız.

Rasyonel sayılar kümesi üzerinde *toplama, çıkarma, çarpma, bölme* işlemleri (15.11) ile belirlenen denklik sınıfları yardımıyla tanımlanır. (Bunları yapmayı deneyiniz.)

15.5.1 İyi Tanımlılık

Yukarıdakine benzer işlemleri yaparken denklik sınıflarından hangi temsilcileri seçersek seçelim, hep aynı sonuca ulaşırız. Bu özelik, belirleyicidir. Bunu daha genel söylersek, bir denklik sınıfları kümesine bağlı olarak tanımlanan bir işlemin, denklik sınıflarını temsil etmek üzere seçilecek öğelere bağlı olup olmadığı uygulamada önem taşır.

Tanım 15.5.2. Denklik sınıfları kümesinde tanımlı bir işlem, denklik sınıfını temsil etmek üzere seçilen temsilciye bağlı değilse, o işlem *iyi tanımlıdır.*

Bu kavramı biraz açmakta yarar var. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi üzerinde

$$p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{olmak üzere} \quad f(\frac{p}{q}) = p \tag{15.21}$$

bağıntısını düşünelim. (15.21) kuralına göre

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= 1 \\ f(\frac{2}{4}) &= 2 \\ f(\frac{3}{6}) &= 3 \\ f(\frac{50}{100}) &= 50 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olacaktır. Oysa $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100} = \ldots$ olduğundan (15.21) kuralı f fonksiyonunu belirleyemez. Bu şekildeki bir fonksiyon iyi tanımlı değildir. İyi tanımlı olması için, $\frac{1}{2}$ rasyonel sayısının denklik sınıfından seçilecek her temsilci $\frac{a}{b}$ sayısı için $f(\frac{a}{b})$ değerleri aynı olmalıdır.

Uyarı 15.5.1. Tabii, burada *iyi tanımlı fonksiyon* deyince, sanki iyi tanımlı olmayan fonksiyon varmış izlenimi doğmaktadır. Aslında, (15.21) kuralı bir fonksiyon tanımı değildir. Fonksiyon tanımlı ise, zaten iyi tanımlıdır; kötü tanımlı fonksiyon yoktur. O nedenle, *iyi tanımlı fonksiyon* deyiminin fonksiyon tanımının titizlikle yapılmadığı eski zamanlardan kalmış bir terim olduğu açıktır. Ama sık sık cebirde ve analizde karşınıza çıkabilir.