Bölüm 17

SAYILABİLİR KÜMELER

17.1 EŞGÜÇLÜ KÜMELER

Tanım 17.1.1. A ile B herhangi iki küme olsun.

(a) A ile B kümeleri arasında bire-bir bir eşleme varsa, A ile B kümelerine *eşgüçlüdürler (equipotent)*, denir ve bu durum kısaca, $A \approx B$ simgesiyle gösterilir.

(b) A kümesi B kümesinin bir alt kümesine eşgüçlü ise, A kümesi B kümesinden daha güçlü değil, diyecek ve bunu $A \preccurlyeq B$ simgesiyle göstereceğiz. Bu durumu simgesel olarak şöyle ifade edebiliriz:

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow \exists C(C \subset B) \wedge A \approx C) \tag{17.1}$$

$A \preccurlyeq B$ ile $B \succcurlyeq A$ gösterimleri eş anlamda kullanılacaktır. Birinci gösterim, *A kümesi B kümesinden daha güçlü değil,* diye okunur. İkinci gösterim ise, *B kümesi A kümesinden daha az güçlü değil* , diye okunur.

(c) A kümesi B kümesinden daha güçlü değil ve A ile B eşgüçlü olmuyorsa, A *kümesi B kümesinden daha az güçlüdür*, diyecek ve bunu $A \prec B$ simgesiyle göstereceğiz. Bu durumu simgesel olarak şöyle ifade edebiliriz:

$$A \prec B \Leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge \neg(A \approx B) \tag{17.2}$$

$A \prec B$ ile $B \succ A$ gösterimleri eş anlamda kullanılacaktır. Birinci gösterim, *A kümesi B kümesinden daha güçsüzdür* diye okunur. İkinci gösterim, *B kümesi A kümesinden daha güçlüdür*, diye okunur.

Önerme 17.1.1. *Herhangi bir kümeler ailesi üzerinde eşgüçlülük bir denklik bağıntısıdır.*

İSPAT: $\mathscr{A}$ bir kümeler ailesi olsun. Eşgüçlülük tanımı gereğince, $A \approx B$ olması için gerekli ve yeterli koşul A dan B ye bire-bir-örten (bbö) bir fonksiyonun var olmasıdır.

Her $A \in \mathscr{A}$ için $I_A : A \to A$ özdeşlik (birim) fonksiyonu bbö olduğundan $A \approx A$ dır. O halde eşgüçlülük bağıntısı *dönüşlüdür*. Şimdi $A, B, C \in \mathscr{A}$, $A \approx B$ ve $B \approx C$ olduğunu varsayalım. Tanımdan, $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ bbö fonksiyonları vardır. Öyleyse, $g \circ f$ bileşkesi A dan C ye bbö 'dir. Dolayısıyla $A \approx C$ olur; yani eşgüçlülük *geçişkendir*. Son olarak, $A, B \in \mathscr{A}$ ve $A \approx B$ olduğunu varsayalım. Bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonu var olacaktır. Öyleyse, $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu bbö dir. Dolayısıyla, $B \approx A$ dır; yani eşgüçlülük *simetriktir*. $\boxdot$

Şimdi, $\preccurlyeq$ bağıntısının herhangi bir kümeler ailesi üzerinde bir *iyi sıralama bağıntısı* olduğunu göstermek istiyoruz. Bunu yapmak için, önce, bu bağıntının bir *kısmi sıralama bağıntısı* olduğunu göstereceğiz. Bu işi yaparken de aşağıdaki ilk iki teoreme dayanacağız.

Önerme 17.1.2. *A herhangi bir küme olmak üzere $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ fonksiyonu*

$$X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y) \tag{17.3}$$

özeliğine sahip bir fonksiyon ise $f(T) = T$ olacak şekilde bir $T \in \mathscr{P}(A)$ kümesi vardır.

İSPAT: Bu önerme Sabit Nokta Teoremi'nin kümeler ailesi için ifade edilmiş biçimidir.

$$\mathscr{S} = \{X \mid X \in \mathscr{P}(A),\, X \subset f(X)\} \tag{17.4}$$

kümeler ailesini tanımlayalım. $\emptyset \in \mathscr{S}$ olduğundan $\mathscr{S}$ ailesi boş değildir.

$$T = \bigcup_{X \in \mathscr{S}} X \tag{17.5}$$

diyelim. T kümesinin istenen koşulu sağladığını göstereceğiz. Gerçekten

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{S} &\Rightarrow X \subset f(X) \\ &\Rightarrow X \subset T \\ &\Rightarrow f(X) \subset f(T) \\ &\Rightarrow X \subset f(T) \\ &\Rightarrow \bigcup_{X \in \mathscr{S}} X \subset f(T) \\ &\Rightarrow T \subset f(T) \end{aligned}$$

elde edilir. Oysa

$$\begin{aligned} T \subset f(T) &\Rightarrow f(T) \subset f(f(T)) \\ &\Rightarrow f(T) \in \mathscr{S} \\ &\Rightarrow f(T) \subset T \end{aligned}$$

dir. $\boxdot$

17.1.1 Schröder-Bernstein Teoremi

Teorem 17.1.1 (Schröder-Bernstein Teoremi)**.** *İki kümeden her biri ötekinin bir alt kümesine eşgüçlü ise, bu iki küme birbirine eşgüçlüdür.*

İSPAT: A ile B herhangi iki küme olsun. Eğer B nin bir B_1 alt kümesi A ile eşgüçlü ve A nın bir A_1 alt kümesi B ile eşgüçlü ise, A ile B kümelerinin eşgüçlü olduğunu göstereceğiz. Bunu simgesel gösterirsek,

$$(A \approx B_1 \subset B) \wedge (B \approx A_1 \subset A) \Rightarrow A \approx B \tag{17.6}$$

yazabiliriz. Varsayımımız gereğince $f : A \to B_1$ ve $g : B \to A_1$ bbö fonksiyonlarının varlığını söyleyebiliriz. Şimdi, öncelikle

$$A - T = g(B - f(T))$$

olacak şekilde bir $T \subset A$ alt kümesi olduğunu göstereceğiz. Her $X \subset A$ için bir $\tilde{X}$ kümesini

$$\tilde{X} = A - g(B - f(X))$$

diye tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned} X \subset Y &\Rightarrow f(X) \subset f(Y) \\ &\Rightarrow (B - f(X)) \supset (B - f(Y)) \\ &\Rightarrow g(B - f(X)) \supset g(B - f(Y)) \\ &\Rightarrow (A - g(B - f(X))) \subset (A - g(B - f(Y))) \\ &\Rightarrow \tilde{X} \subset \tilde{Y} \end{aligned}$$

olur Öyleyse, Önerme 17.1.2 gereğince,

$$\begin{gathered} \tilde{f} : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A) \\ X \in \mathscr{P}(A) \Rightarrow \tilde{f}(X) = \tilde{X} \end{gathered}$$

fonksiyonunun sabit bıraktığı bir $T \subset A$ alt kümesi var olacaktır; yani

$$\exists T \in \mathscr{P}(A)\,;\, T = f(T) = \tilde{T}$$

Oysa bu

$$T = A - g(B - f(T))$$

olması demektir. Öte yandan $g(B - f(T)) \subset A$ olduğundan, T kümesinin istediğimiz eşitliği sağladığı görülür. Artık teoremin ispatını tamamlamak için

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in T \\ g^{-1}(x), & x \in A - T \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $h : A \to B$ fonksiyonunun bbö olduğunu görmek yetecektir. Bu ise, hemen görülmektedir.⊡

Teorem 17.1.2. *Her $\mathscr{A}$ kümeler ailesi $\preccurlyeq$ bağıntısına göre kısmi sıralıdır.*

İSPAT: Bu bağıntının *dönüşlü, geçişken ve antisimetrik* olduğunu göstereceğiz.

Bir $A \in \mathscr{A}$ seçelim. $A \approx A$ olduğundan, `Tanım` 17.1.1(b) gereğince $A \preccurlyeq A$ olur ; yani $\preccurlyeq$ bağıntısı *dönüşlüdür.* Bağıntının *geçişken* olduğunu göstermek için $A, B, C \in \mathscr{A}$ ve $A \preccurlyeq B$, $B \preccurlyeq C$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A \approx B_1$ ve $B \approx C_1$ olacak şekilde $B_1 \subset B$ ile $C_1 \subset C$ kümeleri vardır. Öyleyse, $f : A \to B_1$ ve $g : B \to C_1$ bbö fonksiyonlarının varlığını söyleyebiliriz. Şimdi $C_2 = (g \circ f)(A)$ diyelim. $C_2 \subset C$ ve $g \circ f : A \to C_2$ bbö olduğundan, $A \preccurlyeq C$ çıkar. Son olarak bağıntının *antisimetrik* olduğunu gösterelim. Bunun için

$$(A \preccurlyeq B) \wedge (B \preccurlyeq A) \Rightarrow A \approx B \tag{17.7}$$

olduğunu göstermeliyiz. Oysa bunun varlığını (17.6) den; yani Schröder-Bernstein teoreminden biliyoruz.⊡

Artık asıl amacımıza geçebiliriz; yani $\preccurlyeq$ bağıntısının herhangi bir kümeler ailesi üzerinde bir *iyi sıralama bağıntısı* olduğunu gösterebiliriz. Bunun ispatı *"Her küme iyi sıralanabilir"* diyen İyi Sıralama Teoremi'ne(bkz. 22.4) ve *"iyi sıralanmış kümeler mukayese edilebilir"* diyen `Teorem` 20.6.2 'e dayanmaktadır. İyi Sıralama Teoremi'nin, Seçme Aksiyomuna ve sıra sayılarına dayalı ispatını kitabın son bölümünde yapacağız. O zamana kadar, *iyi sıralama teoremini* ispatsız olarak kullanmakta bir sakınca görmüyoruz.

Teorem 17.1.3. *$\mathscr{A}$ herhangi bir kümeler ailesi olsun. Bu aile $\preccurlyeq$ bağıntısına göre iyi sıralıdır.*

İSPAT: Herhangi bir $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ alt ailesi verilsin. Rasgele bir $S \in \mathscr{S}$ seçelim. Eğer S kümesi, $(\mathscr{S}, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı sisteminin en küçük öğesi ise, istediğimiz özelik $\mathscr{S}$ tarafından sağlanıyor demektir. Eğer S kümesi, $\mathscr{S}$ nin en küçük öğesi değilse

$$\mathscr{B} = \{B \mid B \in \mathscr{A} \mid B \preccurlyeq S\}$$

ailesini tanımlayalım. Şimdi iyi sıralama teoremini kullanarak S kümesini iyi sıralayalım ve böylece oluşturduğumuz iyi sıralanmış sistemi $(S, \preceq)$ ile gösterelim. Her $x \in S$ için

$$S_x = \{s \mid s \in S,\ s \prec x\}$$

diyelim. Sonra her $B \in \mathscr{B}$ için

$$\psi(B) = \min\{x \mid x \in S,\ B \approx S_x\}$$

kümesini tanımlayalım.

$$A = \{\psi(B) \mid B \in \mathscr{B}\}$$

kümesi S nin boş olmayan bir alt kümesidir. $(S, \preceq)$ *iyi sıralı* olduğundan, A kümesi *en küçük (min) öğeye* sahiptir. Buna $\psi(D)$ diyelim. Göstereceğiz ki D kümesi, $\mathscr{B}$ nin en küçük öğesidir. Gerçekten, $B \in \mathscr{B}$ için $\psi(D) \preceq \psi(B)$ dır. Öyleyse, $S_{\psi(D)} \subset S_{\psi(B)}$ olacaktır. Buradan

$$D \to S_{\psi(D)} \to S_{\psi(B)} \to B$$

dönüşümleri bire-bir-içinedir. Demek ki $D \preceq B$ dir. Bu da D kümesinin, $(S, \preceq)$ sisteminin en küçük öğesi olduğunu gösterir. $\mathscr{B}$ nin tanımından, D kümesi , $(\mathscr{B}, \preccurlyeq)$ sisteminin en küçük öğesi olur. Böylece, $\mathscr{A}$ nın her alt kümesinin *en küçük öğesinin varlığı* çıkar. $\boxdot$

17.2 SONLU ve SONSUZ KÜMELER

Onüçüncü bölümde doğal sayıları tanımlarken kurduğumuz (1.2) sistemini yeniden düşünelim: **Tanım:**

$$\begin{aligned}
0 &= \natural(\emptyset) \\
1 &= \natural(\{0\}) \\
2 &= \natural(\{0,1\}) \\
3 &= \natural(\{0,1,2\}) \\
&\vdots \\
r &= \natural(\{0,1,2,\cdots,r-1\}) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{17.8}$$

Bütün bu kümelerden oluşan aileye doğal sayılar kümesi demiş ve bunu ω ile göstermiştik; yani

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \tag{17.9}$$

demiştik. Şimdi sonlu ve sonsuz kümeleri tanımlayabiliriz.

Tanım 17.2.1. (17.8) sistemine ait kümelerden her hangi birisine eşgüçlü olan kümeye *sonlu küme*, denir.

Tanım 17.2.2. Sonlu olmayan kümeye *sonsuz küme*, denir.

Tanım 17.2.3. (17.9) ile belirlenen doğal sayılar kümesine eşgüçlü olan kümeye *sayılabilir sonsuz* küme, denir.

Tanım 17.2.4. Sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir kümeye *sayılabilir* küme, denir. Kümenin sonsuz olduğunu vurgulamak gerektiğinde *sayılabilir sonsuz*, diyeceğiz.

Bir A kümesinin sonlu olması demek, tanımı gereğince, ω doğal sayılar kümesine ait bir $n+$ sayısı ile bire-bir eşlenebilmesi demektir. Öyleyse, bir

$$f : n+ \to A$$

bbö dönüşümü vardır. Her $m \in n+$ öğesinin f altındaki resmini a_m ile gösterelim; yani

$$f(m) = a_m$$

olsun. Daha açıkçası

$$\begin{aligned} 0 &\longmapsto a_0 \\ 1 &\longmapsto a_1 \\ 2 &\longmapsto a_2 \\ 3 &\longmapsto a_3 \\ &\vdots \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned} \tag{17.10}$$

olsun. Buna göre

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \tag{17.11}$$

olacaktır. Bu durum olduğunda, A kümesinin öğeleri $n+$ doğal sayısının öğeleriyle damgalanmıştır. Dolayısıyla, A kümesinin $n+$ tane öğesi vardır, denir.

Şimdi bunu daha genel olarak düşünelim. Eğer A sayılabilir sonsuz bir küme ise A ile ω doğal sayılar kümesi bire-bir eşlenebilir. Öyleyse, (17.10) eşlemesi her $n \in \omega$ için düşünüldüğünde,

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \tag{17.12}$$

olacaktır. Bu durum olduğunda, A kümesinin öğeleri ω doğal sayılar kümesinin öğeleriyle damgalanmıştır. Dolayısıyla A kümesinin öğelerinin sayısı, ω kümesinin öğelerinin sayısı kadardır. (17.11) ve (17.12) de, özel olarak, damgalayan kümelerin öğelerinin birer doğal sayı olduğu düşünülerek, bu kümelere *numaralanabilir kümeler* de denir.

17.3 SAYILABİLİR KÜMELER

Bu kesimde sayılabilir kümelerin temel özeliklerini göreceğiz.

Teorem 17.3.1. *Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi de sayılabilir.*

İSPAT: Sonlu her kümenin alt kümeleri de sonlu olacağından, bu durum apaçıktır. Öyleyse, *sayılabilir sonsuzluk* durumunu inceleyelim. Sayılabilir sonsuz bir A kümesi düşünelim. (17.12) deki düşünüşle

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

yazabiliriz, A nın herhangi bir B alt kümesini seçelim. B kümesine ait öğelerin damgalarının (index) oluşturduğu kümeye α diyelim; yani

$$\alpha = \{n \mid n \in \omega,\ a_n \in B\}$$

kümesini tanımlayalım, $\alpha \subset \omega$ dır. ω doğal sayılar kümesi iyi sıralı olduğundan, α nın *en küçük (min) öğesi* vardır. Bunu r_0 ile gösterelim. Sonra

$$B_1 = (B - \{a_{r_0}\})$$

kümesini düşünelim. B_1 kümesine ait öğelerin damgalarının (indislerinin) oluşturduğu kümeye α_1 ve bunun en küçük öğesine de r_1 diyelim. Böylece devam edersek, $n+1$ adımdan sonra

$$B_{n+1} = (B - \{a_{r_0}, a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_n}\})$$

kümesini elde ederiz. *Tüme Varım İlkesi* uyarınca, bu işlemi istediğimiz kadar sürdürebiliriz. Dolayısıyla, B kümesine ait herhangi bir a_k öğesine, yukarıdaki yöntemle, ençok $k+1$ adımda varabiliriz. Başka bir deyişle B nin bütün öğelerini numaralayabiliriz. ⊡

Teorem 17.3.2. *Her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır.*

İSPAT: Verilen sonsuz küme A olsun. $A \neq \emptyset$ olduğundan, A nın herhangi bir öğesini seçebilir ve bunu a_0 ile gösterebiliriz. Sonra $A - \{a_0\}$ kümesinden bir öğe seçip buna da a_1 diyebiliriz. Böylece devam ederek $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ öğelerini seçmiş olalım. A sonsuz olduğundan, her $n \in \omega$ için

$$(A - \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}) \neq \emptyset$$

olacaktır. Öyleyse, bu sonuncudan da bir öğe seçip buna a_{n+1} diyebiliriz. A sonsuz olduğuna göre, bu işi istediğimiz kadar tekrarlayabilir ve *Tüme Varım İlkesi uyarınca,* sayılabilir sonsuz

$$S = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$$

kümesini kurabiliriz. S kümesi sayılabilirdir. Öğeleri A dan seçildiği için, S kümesinin A nın bir alt kümesi olduğu apaçıktır. ⊡

Teorem 17.3.3. *A sonsuz bir küme, B sayılabilir bir küme ise $A \cup B$ bileşimi A kümesine eşgüçlüdür.*

İSPAT: $A \cup B = A \cup (B - A)$ dır ve `Teorem` 17.3.1 gereğince, $(B - A)$ sayılabilir bir kümedir. Öyleyse, işin başında $A \cap B \neq \emptyset$ kabul edersek, teoremin genelliği bozulmayacaktır. Bu kabul altında iki ayrı durum düşünebiliriz.

1.Durum: B sayılabilir sonsuz bir küme ise,

$$B = \{b_0, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$$

yazabiliriz. `Teorem` 17.3.2 gereğince, A nın sayılabilir sonsuz bir

$$C = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$$

alt kümesini seçebiliriz. Şimdi bir $f : A \to A \cup B$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x = a_{2n} \\ b_n, & x = a_{2n+1} \\ x, & x \in (A - C) \end{cases}$$

Kolayca görüleceği gibi bu fonksiyon bbö bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $A \approx A \cup B$ olur.

2.Durum: B sonlu bir küme olsun. B yi kapsayan sayılabilir sonsuz bir D kümesi düşünelim. Buradan

$$A \subset A \cup B \subset A \cup D$$

yazabiliriz. $A \to A \cup B$ ve $A \cup B \to A \cup D$ gömme fonksiyonlan bire-bir-içine olduğundan

$$A \preccurlyeq (A \cup B) \preccurlyeq (A \cup D)$$

çıkar. Oysa 1.Durum gereğince $A \cup D \preccurlyeq A$ dır. Demek ki

$$A \preccurlyeq (A \cup B) \preccurlyeq A$$

dır. Artık, Schröder-Bernstein Teoreminden $A \approx A \cup B$ olur. ⊡

Sonuç 17.3.1. *Sayılabilir kümelerin sonlu tanesinin bileşimi sayılabilir bir kümedir.*

İSPAT: $\{A_i \mid i = 0, 1, 2, ..., n\}$ ailesine ait her A_i kümesinin sayılabilir olduğunu varsayalım. Teorem 17.3.3 gereğince, $A_0 \approx A_0 \cup A_1$ dir; yani $A_0 \cup A_1$ bileşimi sayılabilir bir küme olacaktır. Şimdi $B = A_0 \cup A_1$ dersek, aynı düşünüşle, $B \cup A_2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ bileşimi de sayılabilir bir küme olacaktır. Bu eyleme devam edersek

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i$$

bileşiminin sayılabilir bir küme olduğu çıkar. ⊡

Teorem 17.3.4. *Sayılabilir sonsuz iki kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuz bir kümedir.*

İSPAT: $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ ve $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ kümeleri verilsin. $A \times B$ kartezyen çarpımının öğelerini aşağıdaki şekilde sıralayalım:

$$\begin{array}{ccccccc}
(a_0, b_0) & (a_0, b_1) & (a_0, b_2) & (a_0, b_3) & \ldots & (a_0, b_m) & \ldots \\
(a_1, b_0) & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \ldots & (a_1, b_m) & \ldots \\
(a_2, b_0) & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & \ldots & (a_2, b_m) & \ldots \\
(a_3, b_0) & (a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & \ldots & (a_3, b_m) & \ldots \\
\vdots & & & & & & \\
(a_n, b_0) & (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & (a_n, b_3) & \ldots & (a_n, b_m) & \ldots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Cantor Diyagonal Sayma

$A \times B$ kartezyen çarpımının bütün öğeleri bu tabloda yer almış olacaktır. Artık bu tablodaki sıralı çiftleri saymak kolaydır. Bunun için ya Tablo 16.2 de yaptığımız gibi kareleme sayımını kullanabiliriz ya da tabloda sol üst köşede, sırayla, oluşan karelerin köşegenleri üzerindeki öğeleri karelerin oluş sırasıyla saymaya başlayalım:

$$\begin{aligned}(a_0, b_0) &\longmapsto 0\\(a_0, b_1) &\longmapsto 1\\(a_1, b_0) &\longmapsto 2\\(a_0, b_2) &\longmapsto 3\\(a_1, b_1) &\longmapsto 4\\(a_2, b_0) &\longmapsto 5\\&\vdots\end{aligned}$$

Bu sayma yöntemine *Cantor köşegen yöntemi* denilir. Kolayca sezildiği gibi, bu sayma (eşleştirme) yöntemi, $A \times B$ kartezyen çarpımı ile ω doğal sayılar kümesi arasında bire-bir bir eşleme kurar. O halde $A \times B$ kartezyen çarpımı sayılabilir bir kümedir. ⊡

Sonuç 17.3.2. *Sayılabilir sonsuz kümelerin sonlu tanesinin kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuz bir kümedir.*

İSPAT: $\{A_i \mid i = 0, l, 2, ..., n\}$ ailesinin her A_i kümesi *sayılabilir sonsuz* bir küme olsun. `Teorem` 17.3.4 uyarınca $B = A_0 \times A_1$ kartezyen çarpımının sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu biliyoruz. Aynı düşünüşle, $B_1 = B \times A_2 = A_0 \times A_1 \times A_3$ kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuz bir küme olacaktır. Bu eylemi n kez tekrarlarsak, Tüme Varım İlkesine göre,

$$\prod_{i=0}^{n} A_i$$

kartezyen çarpımının sayılabilir sonsuz bir küme olduğu görülür. ⊡

Sonuç 17.3.3. $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi sayılabilir bir kümedir.*

İSPAT: Önce bir gösterim tanımlayalım. x ile y herhangi iki tamsayı olsun. Eğer x ile y tamsayılarının 1 den başka ortak böleni yoksa, bunu $< x, y >= 1$ simgesiyle belirtelim.

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \omega,\ y \neq 0,\ < x, y >= 1\}$$

kümesini düşünelim. $A \subset \omega \times \omega$ olduğu apaçıktır. Öyleyse, A sayılabilir bir kümedir. Ayrıca, A kümesi

$$\{(x, 1) \mid x \in \omega\}$$

kümesini kapsadığından, sonsuz bir kümedir. Bu iki sonuçtan $\omega \preccurlyeq A \preccurlyeq \omega$ çıkar; yani A sayılabilir sonsuz bir kümedir. Şimdi pozitif rasyonel sayıları $\mathbb{Q}^+$ ve negatif rasyonel sayıları $\mathbb{Q}^-$ ile gösterelim. Sonra

$$f : A \to \mathbb{Q}^+,\ f(x, y) = \frac{x}{y}$$

dönüşümünü tammlayalım. Bunun bbö olduğu apaçıktır. Öyleyse, $\mathbb{Q}^+ \approx \omega$ dır. Öte yandan $x \to -x$ bire-bir eşlemesinden görülebileceği gibi $\mathbb{Q}^+ \approx \mathbb{Q}^-$ dır.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$$

olduğundan, `Sonuç` 17.3.1 uyarınca $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğu görülür. ⊡

Teorem 17.3.5. *Sayılabilir sayıda sayılabilir kümelerin bileşimi sayılabilir bir kümedir.*

İSPAT:
Sonuç 17.3.1 düşünürsek, yalnız sayılabilir sonsuz tane sayılabilir kümelerin bileşiminin sayılabilir olduğunu göstermemiz yetecektir. Bu koşulu sağlayan kümeler $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ olsun. Şimdi

$$B_i = A_i - \bigcup_{j<i} A_j \ (i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

kümeler dizisini tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\{B_i \mid i \in \omega\}$ ailesinin ayrık ve

$$\bigcup_{i\in\omega} B_i = \bigcup_{i\in\omega} A_i$$

olduğu açıktır. `Teorem` 17.3.1 gereğince, her $i \in \omega$ için B_i kümesi *sayılabilir* bir kümedir. Şu halde, sonlu ya da sonsuz oluşuna göre, sırasıyla,

$$B_i = \{b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}\}$$
$$B_i = \{b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}, \ldots\}$$

yazabiliriz. Şimdi bir

$$f : \bigcup_{i\in\omega} B_i \to \omega \times \omega, \quad f(b_{ij} = (i, j)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun bire-bir bir fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir. Öyleyse

$$\bigcup_{i\in\omega} B_i \preccurlyeq \omega$$

dır; yani bu bileşim sayılabilir bir kümedir. ⊡

Teorem 17.3.6. *Terimleri sayılabilir bir kümeye ait olan bütün sonlu dizilerin kümesi sayılabilir bir kümedir.*

İSPAT: Verilen sayılabilir kümeye A diyelim. Sabit bir n sayısı alındığında, terimleri A dan alınan n-sıralı bütün öğelerin oluşturduğu kümeyi

$$\prod_{i\in\omega} A_i, \ A_i = A, \ (i = l, 2, 3, ..., n)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi n yi bütün sonlu sayılar üzerinde kaydırdığımız zaman, aynı yolla, bütün sonlu dizilerin kümesini elde edebiliriz. Bu kümeyi

$$S = \bigcup_{i \in \omega} \left(\prod_{i=1}^{n} A_i \right)$$

şeklinde yazabiliriz. `Sonuç` 17.3.2 gereğince, bu ifadede parantez içinde bulunan $\Pi_{i=1}^{n} A_i$ kartezyen çarpımları sayılabilir birer kümedir. `Teorem` 17.3.5 gereğince, sayılabilir sayıda sayılabilir kümelerin bileşimi sayılabilirdir. Dolayısyla S kümesi sayılabilir bir kümedir. $\boxdot$

Sonuç 17.3.4. *Sayılabilir bir alfabeden oluşan bütün kelimeler kümesi sayılabilir bir kümedir.*

Teorem 17.3.7. *Cebirsel sayılar kümesi sayılabilir bir kümedir.*

İSPAT: Tamsayı katsayılı

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

şeklindeki polinomların kökü olan karmaşık sayılara *cebirsel sayılar* diyoruz. Rasyonel sayıların bir alt kümesi olduğundan, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi sayılabilir kümedir. Öyleyse, `Teorem` 17.3.6 gereğince, yukarıdaki gibi yazılabilen bütün polinomlarm kümesi sayılabilir. Bir polinomun ancak sonlu sayıda kökü olacağından, `Sonuç` 17.3.4 uyarınca, sayılabilir tane polinonıun sayılabilir (sonlu) köklerinin oluşturduğu küme sayılabilir bir kümedir. $\boxdot$

Teorem 17.3.8. *Sayılabilir bir kümenin bütün sonlu alt-kümelerinin oluşturduğu aile sayılabilir bir kümedir.*

İSPAT: Söz konusu sayılabilir küme olarak ω doğal sayılar kümesini alırsak, teoremin genelliği bozulmaz. ω nın her sonlu A alt kümesinin öğelerini küçükten büyüğe doğru bir tek şekilde sıralayabiliriz. Öğe sayısı n $(n \in \omega)$ olmak üzere A, kümesinin öğelerinin, doğal sırada, $A = A_n = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şeklindeki sıralandığını varsayalım. $A = A_n$ kümesinin öğelerini $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sonlu dizisine eşleyebiliriz. Bu eşleme, ω nın bütün sonlu alt kümeleri ailesinden sonlu diziler ailesine bire-birdir. Tabii

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i = \omega^n, \; A_i = \omega$$

yazabiliriz. `Teorem` 17.3.6 gereğince, bu şekildeki sonlu dizilerin oluşturduğu küme sayılabilir olacaktır. $\boxdot$

17.4 GERÇEL SAYILAR

17.4.1 Dedekind Kesimi

Gerçel sayıları kurmanın yollarından birisi ve ilk kurgulananı Dedekind Kesimi yöntemidir.

Tanım 17.4.1. Rasyonel sayıların aşağıdaki üç özeliğe sahip olan her A alt kümesi bir *Dedekind* kesimidir:

1. $A \neq \emptyset$ ve $A \neq \mathbb{Q}$
2. $(a \in A) \wedge (b < a) \Rightarrow b \in A$
3. $(a \in A) \exists a' \in A : a < a'$

$A \cup A' = \mathbb{Q}$ ve $A \cap A' = \emptyset$ dir. Dolayısıyla, her Dedekind kesimi rasyonel sayıları iki ayrık kümeye ayırır. Dedekind kesimine ait her öğe, tümleyene ait her öğeden küçüktür. Bu nedenle, Dedekind kesimine alt yarı küme, tümleyenine ise üst yarı küme denilir.

Tanım 17.4.2. Rasyonel sayılar kümesinin bütün Dedekind kesimlerinin oluşturduğu küme gerçel sayılar kümesidir.

Gerçel sayılar kümesi üzerinde *toplama, çıkarma, çarpma ve bölme* işlemleriyle *sıralama bağıntısı* Dedekind kesimi yardımıyla tanımlanabilir.

17.5 PROBLEMLER

1. Öklid düzlemindeki rasyonel koordinatlı noktalar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

2. Gerçel eksen üzerinde, birbirini kesmeyen aralıklardan oluşan her ailenin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

3. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ olacak şekilde veriliyor. f fonksiyonunun süreksizlik yerlerinin sayılabilir bir küme oluşturduğunu gösteriniz.

4. Sayılabilir bir kümeyi, birbirlerinden ayrık sayılabilir tane sayılabilir kümelerin bileşimi olarak yazınız.

5. Doğru ya da düzlem üzerinde ancak sonlu tane yığılma noktasına sahip sonsuz bir noktalar kümesi veriliyor. Bu kümenin sayılabilir olduğunu ve ifadenin karşıtının doğru olamayacağını bir örnekle gösteriniz.

6. Rasyonel sayılardan gerçel sayıları kurmanın başka bir yolu topolojik yöntemdir. Terimleri rasyonel sayılar olan Cauchy dizilerini $\mathcal{D}$ ile gösterelim. ,D kümesi üzerinde, aynı limite giden dizileri denk sayan bir denklik bağıntısı kurulabilir. Bu bağıntının denklik sınıflarının oluşturduğu küme *gerçel sayılar* kümesidir.

   Gerçel sayılar kümesi üzerinde *toplama, çıkarma, çarpma ve bölme* işlemleri, dizilerin analizden bilinen işlemleri yardımıyla tanımlanabilir. Bunu yapmayı deneyiniz.