Bölüm 18

SAYILAMAYAN SONSUZ KÜMELER

18.1 SAYILAMAZ KÜMELER

Sayılabilir sonsuz kümelerden sonra, matematikte en önemli sonsuz küme $\mathbb{R}$ ile temsil ettiğimiz gerçel sayılar kümesidir. Buna *sürey (continuum)* denilir. Gerçel sayı ve gerçel eksen kavramının bilindiğini varsayıyoruz. Doğal sayılardan hareketle tam sayıların, tam sayılardan hareketle rasyonel sayıların kuruluşunu ve bu sonuncudan hareketle ya *Dedekind kesimiyle* ya da rasyonel sayıların Cauchy dizileriyle gerçel sayıların aksiyomatik kuruluşunu, öğrenci Analiz derslerinden bilmektedir. Zaten bu konuda çok ayrıntılı ön bilgilere gereksinmeyeceğiz. Hattâ liseden bilinenler bile bizim için yeterli olacaktır.

Şimdi Olağanüstü Otelde yapılamıyan işi anımsayalım. Kahramanımız *Kalender*'in uyguladığı yöntemi kullanarak, gerçel sayılar kümesinin sayılamayan sonsuz bir küme olduğunu göstereceğiz.

Teorem 18.1.1. $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\}$ *yarı-açık aralığındaki noktalar kümesi sayılamayan sonsuz bir kümedir.*

İSPAT: Bu kümenin sonsuz olduğunu görmek kolaydır. Örneğin, ω doğal sayılar kümesinden bu küme içine $n \longmapsto \frac{1}{n}$ dönüşümü bire-bir-içine (bbi) bir fonksiyondur. Ama örten bir fonksiyon değildir. Böyle olduğunu bir karşıt örnekle görebiliriz. Örnekse, söz konusu dönüşüm altında $\frac{1}{\pi}$ sayısı üzerine gelen bir n tamsayısı yoktur. Öyleyse, ω doğal sayılar kümesi $(0,1]$ kümesinden daha güçlü değildir.

Şimdi $(0,1]$ kümesinin sayılamaz olduğunu gösterelim.

Her gerçel sayının bir ve yalnızca bir tane sonsuz ondalık açılımı vardır. Örneğin,

$$4 = 3,999\ldots, \qquad 2,78 = 2,77999\ldots$$

yazabiliriz.

$$
\begin{array}{lllllll}
a_0 = 0, a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots & a_{0n} & \dots \\
a_1 = 0, a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\
a_2 = 0, a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\
\quad\vdots & & & & & & \\
a_m = 0, a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & \dots \\
\quad\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Tablo 18.1: Ondalık Açılımlar

İspat için Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. $(0,1]$ aralığındaki bütün gerçel sayıların sayılabilir bir küme olduğunu kabul edelim. Bu kabulümüze göre

$$(0,1] = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

şeklinde olmalıdır. Buradaki a_m, $(m = 0, 1, 2, 3, \dots)$, sayıları 0 ile 1 arasında bulunan bir gerçel sayı olduğuna göre, bu sayıların her birisinin, aşağıdaki gibi sonsuz ondalık açılımlarını yazabiliriz.

$$a_m = 0, a_{m0}a_{m1}a_{m2}a_{m3}\dots a_{mn}\dots$$

Burada a_{mi} sayıları ondalık açılımda yer alan $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ rakamlarından birisidir. Şimdi bu sayıların sonsuz ondalık açılımlarını `Tablo` 18.1 deki gibi ard arda dizelim. Tablonun kolay okunurluğunu sağlamak için, ondalık açılımlardaki rakamları birbirlerinden biraz uzaklaştırarak yazıyoruz.

Kabulümüz doğru ise, $(0,1]$ aralığındaki bütün gerçel sayılar bu tabloda yer almış olmalıdır. Oysa, kahramanımız *Kalender*'in yöntemiyle, bu tablodaki sayılardan hiç birisine eşit olmadığı halde $(0,1]$ aralığına ait olan bir sayı bulabiliriz. Bunun için, her $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ doğal sayısına karşılık,

$$b_i = \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases} \tag{18.1}$$

olmak üzere

$$b = 0, b_0b_1b_2b_3\dots b_m\dots$$

gerçel sayısını tanımlayalım. Bu sayı $(0,1]$ aralığında olduğuna göre, `Tablo` 18.1 deki sayılardan birisine eşit olmalıdır. Oysa b nin tanımı gereğince, $a_{00} \neq b_0$ dır. O halde b sayısı tablodaki a_0 sayısına eşit olamaz. Yine, $a_{11} \neq b_1$ dir. Ohalde, b sayısı tablodaki a_1 sayısına da eşit olamaz. Böylece devam edersek,

$$b_0 \neq a_{00},\ b_1 \neq a_{11},\ b_2 \neq a_{22},\ b_3 \neq a_{33},\ \dots,\ b_m \neq a_{mm}, \dots$$

olduğunu görebiliriz. Demek ki, b sayısı `Tablo` 18.1 deki $\{a_i\}$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ sayılarından hiç birisine eşit olamaz. Öyleyse, bu tabloda yer alamamış olduğu halde $(0,1]$ aralığına ait bir b sayısı bulmuş oluyoruz. Bu ise, kabulümüzle çelişir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır. Demek ki, $(0,1]$ aralığındaki sayılar sayılamaz. $\boxdot$

18.1.1 Bütün Parçasına Eşit mi?

Bir bütün bir parçasına eşit olabilir. Burada eşitlik deyimi sonlu kümelerdeki eşitlikten farklıdır ve eşgüçlülük anlamındadır. Konuyu daha iyi açıklamak için şu soruya yanıt arayalım. Bir atom çekirdeğinin yarıçapı üzerindeki noktaların sayısı, bir milyon *ışık yılı* (ışığın bir milyon yılda alacağı yol) uzunluğundaki bir doğru parçası üzerindeki noktaların sayısı kadar olabilir mi? Sanıyoruz ki, bu soruya pek çoğunuz *"olamaz"* diyorsunuz. Ama bunun böyle olduğunu göstermek zor değildir.

Problemi daha genel olarak ortaya koyalım, istediğimiz kadar küçük bir $[AB]$ doğru parçasına ait noktaların sayısının, istediğimiz kadar büyük bir $[CD]$ doğrusuna ait noktaların sayısı kadar olduğunu göstermek için bu doğru parçalarını aynı duğrultuda olmamak üzere bir düzlem üzerine çizelim. Sonra $[CA]$ ile $[DB]$ doğrularının kesişim noktasını O ile gösterelim. $[AB]$ üzerinde alınacak her E noktası için $[OE]$ doğrusu $[CD]$ yi bir tek F noktasında keser. Bu eylem $[AB]$ nin her E noktasına $[CD]$ nin bir tek F noktasını eşler; yani eşleşme bire-bir olur. Tersine olarak, $[CD]$ üzerinde alınacak her F noktası için $[OF]$ doğrusu $[AB]$ yi bir tek E noktasında keser. Bu eylem $[CD]$ nin her F noktasına $[AB]$ nin bir tek E noktasını eşler; yani eşleşme bire-bir olur. İki eylemi bir arada düşünürsek $[AB]$ ile $[CD]$ nin bire-bir eşleştiği ortaya çıkar.

Öyleyse $[AB] \approx [CD]$ dir.

Eğer yukarıdaki ispatta, geometriye dayalı olmaktan sakınmak istersek, şöyle bir yol izleyebiliriz: $(0,1]$ yarı-açık aralığına bir tek 0 noktasını eklersek, `Teorem` 17.3.3 gereğince, $(0,1] \approx [0,1]$ olacaktır. Burada $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ kapalı aralığıdır. Şimdi, uzunluğun değişmesinin, eşgüçlülüğe etkimediğini göstereceğiz. Bunun için $(0,1]$ aralığını herhangi bir $(0,k]$, $(k>0)$ sabit) aralığına

$$f : x \longmapsto kx \tag{18.2}$$

sünme dönüşümüyle bbö olarak resmetmek mümkündür. Demek ki

$$(0,1] \approx (0,k] \tag{18.3}$$

dır.

Aynı dönüşümle

$$(0,1) \approx (0,k) \tag{18.4}$$

eşgüçlülüğünü de söyleyebiliriz.

Bundan sonraki teoremde yararlanmak üzere, $(0,1)$ aralığının $(-1,1)$ aralığına eşgüçlü olduğunu gösterelim. Bunun için $(0,1)$ aralığından $(-1,1)$ aralığına tanımlanan $f : x \longmapsto 2x-1$ fonksiyonunun bbö olduğunu görmek yetecektir.

Teorem 18.1.2. *Gerçel sayılar kümesi sayılamaz.*

İSPAT: Önce $(-1, 1)$ aralığından $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ kümesine

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x}{1+x}, & x < 0 \end{cases} \tag{18.5}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun bbö olduğu kolayca görülebilir. Demek ki $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ dir. Oysa, $(0, 1) \approx (-1, 1)$ idi. Eşgüçlülük *geçişli* olduğundan, artık, her $k > 0$ için

$$(0, k) \approx (0, 1) \approx (-1, 1) \approx ((-\infty, +\infty) \tag{18.6}$$

olduğu görülür. Ayrıca, $(0, 1) \approx (0, 1]$ eşgüçlülüğü düşünülürse, herhangi bir açık, yarı-açık ya da kapalı aralığın $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesine eşgüçlü olduğunu söyleyebiliriz. Bu sonuç, $(0, 1]$ aralığının sayılamazlığı ile birleştirilince, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu gösterir. $\boxdot$

18.1.2 Görüyorum, ama inanamıyorum!

Kümeler kuramının kurucusu *Cantor* bir doğru parçası üzerindeki noktalar kümesinden daha güçlü olan bir küme arıyordu. Hiç bir kuşkuya kapılmaksızın, bir kareye ait noktalar kümesinin, bu karenin bir kenarı üzerindeki noktalar kümesinden daha güçlü olduğunu sanıyor ve bunu ispat etmeye uğraşıyordu. Öyle ya, kenar üzerindeki noktalar kareye de ait olduğuna göre, kareye ait noktaların sayısının, bu kenara ait noktaların sayısından daha çok olmasından doğal bir şey olabilir mi? Cantor 1871 den 1874 yılına kadar tam üç yıl inandığı bu sonucu doğrulayacak bir ispat yöntemi aradı. Daha açıkçası, bir kareye ait noktalarla, bu karenin bir kenarına ait noktalar arasında bire-bir bir eşlemenin olanaksız olduğunu gösterecek bir yol aradı. Üç yıl buşuna uğraştıktan sonra, aradığı özeliğin tam tersinin varlığını; yani bir karenin noktaları sayısının ancak bir kenarına ait noktaların sayısı kadar olduğunu gördü. Cantor, bu sonuca şaşırıyor ve çağdaşı ünlü matematikçi *Dedekind*'e şöyle yazıyordu: *"Görüyorum, ama inanamıyorum!"*

Şimdi Cautor'u şaşırtan bu sonucu, yine Cantor'un yöntemiyle gösterelim.

Teorem 18.1.3. *Bir kare bir kenarına eşgüçlüdür.*

İSPAT: Birim kareyi, sol alt köşesi koordinat başlangıcında ve alt kenarı Ox ekseniyle çakışır biçimde konuşlandırlım. $(0, 1]$ aralığındaki her x sayısının bir ve yalnız bir tane sonsuz omdalık açılımı vardır:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots \tag{18.7}$$

Şimdi bu ondalıklar dizisini aşağıdaki gibi bloklara ayıralım: 0 dan farklı ve önünde sıfır bulunmayan her ondalık kendi başına bir blok olsun. 0 ya da ardışık 0 lar ile bunlardan sonra gelen ilk sıfırdan farklı ondalık başka bir blok olsun. Örneğin,

$$x = 0, 1702100637 \ldots, \; y = 0, 2360470085 \ldots$$

sonsuz ondalık açılımlarının bloklara ayrılışı şöyledir:

$$x = 0, |1|7|02|1|006|3|7|\ldots \tag{18.8}$$
$$y = 0, |2|3|6|04|7|008|5|\ldots \tag{18.9}$$

Eğer (x, y) sıralı çifti $(0, 1] \times (0, 1]$ kartezyen çarpımına ait ise; yani birim kareye ait bir nokta ise, x ile y sayılarını yukarıdaki gibi bloklara ayırdıktan sonra, bir z sayısını şöyle oluşturalım. Sırayla bir blok x den sonra bir blok y den alarak z nin sonsuz ondalık açılımını oluşturabiliriz. Bunu daha açık söylersek, x in birinci blokuna z_1, y nin birinci blokuna z_2, x in ikinci blokuna z_3, y nin ikinci blokuna z_4,... diyelim. Böylece bir blok x inkinden, bir blok y ninkinden alarak

$$z = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

sayısını oluşturalım. Bu sayının $(0, 1]$ aralığında olacağı apaçıktır. Örneğin, yukarıdaki (x, y) sıralı çiftine karşılık bulunacak sayı

$$z = 0, 12730261040067300875\ldots$$

sayısıdır. Yukarıda açıklanan eylemi yapan

$$(x, y) \longmapsto z$$

dönüşümü, $(0, 1] \times (0, 1]$ kartezyen çarpımından $(0, 1]$ kümesine bbö dir (bunu sağlayınız). Böylece, istediğimiz sonuç çıkmış olur.$\boxdot$

18.1.3 Sürey Hipotezi

Her sonlu kümeden daha güçlü olan ω doğal sayılar kümesini inceledik. Sonra bunun sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu söyledik. Daha sonra, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin ω dan daha güçlü ve sayılamaz olduğunu gördük. Şimdi ortaya bir soru çıkıyor.

> Acaba ω doğal sayılar kümesinden daha güçlü ve $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinden daha az güçlü bir küme var mıdır?

Cantor, böyle bir kümenin var olmadığını tahmin ediyordu. Matematikçileri uzun yıllar uğraştıran bu soruya yanıt verilemedi. Yanıt verilemeyişi problemi çözecek kadar akıllı matematikçi olmayışından değil, matematiğin temellerine inen çözümsüz bir soru oluşundan kaynaklandı. *Sürey hipotezi (continuum hypothesis)* adıyla anılan bu konu üzerindeki ilk önemli bilgi 1940 yılında *Kurt Gödel* tarafından verildi. Gödel, sürey hipotezinin doğru ya da, yanlışlığını aramak yerine, şunu gösterdi:

> Kendi içinde tutarlı (çelişkisiz) bir aksiyomatik sisteme sürey hipotezi yeni bir aksiyom olarak katılırsa, sistemde bir çelişki doğmaz.

Gödel'in verdiği bu sonuç, matematiğe bakışımızı esastan değiştirdi. Burada bir aksiyomatik sistemin tutarlı (çelişmez) olmasının ne demeye geldiğini açıklamak yararlı olacaktır. Bir aksiyomatik sistem içinde tanımlı bir p önermesini düşünelim. Eğer hem p ve hem de $\neg p$ önermeleri aynı anda doğru oluyorsa, bu sistem tutarsız (çelişik) bir sistemdir. Eğer hem kendisi hem değili doğru olacak şekilde hiç bir önerme yoksa, o sistem tutarlı (çelişkisiz) bir sistemdir.

Eğer bir sistem çelişik ise, bu sistem üzerinde çalışmanın matematiksel bir anlamı ve değeri yoktur. Çelişik bir sistemde doğrular ve yanlışlar belirlenemez. Dolayısıyla, matematiksel sistemlerin çelişkisiz olmaları esastır.

Dikkat ettiyseniz, bu kitapta yaptığımız bazı ispatlarda *Olmayana Ergi yöntemini* kullandık. Bu yöntem, içinde çalıştığımız matematik sistemin çelişkisiz olduğu gerçeğine dayanır. Dolayısıyla, bu ispat yönteminde, kabul edilen bir p varsayımından hareketle $\neg p$ değili çıkarılabiliyorsa, sistemde hem p hem $\neg p$ aynı anda var olur. Çelişkisiz sistemde bu olamayacağından, p varsayımının olamayacağı sonucuna varılır.

Bu açıklamaya göre, Gödel'in verdiği sonuç şudur: p önermesi olarak sürey hipotezini alalım. Buradan hareketle $\neg p$ önermesi elde edilemez. Başka bir deyişle, *Kümeler Kuramının* aksiyomları ile sürey hipotezi çürütülemez.

1963 yılında *Paul Cohen*, bu konuyu kapatan şu önemli sonucu verdi:

"Sürey hipotezi kümeler kuramının aksiyomlarından bağımsızdır."

Cohen şunu söylüyor: Kümeler Kuramının aksiyomlarına sürey hipotezini yeni bir aksiyom olarak kattığımızda nasıl bir çelişki doğmuyorsa, sürey hipotezinin değilini kattığımızda da bir çelişki doğmayacaktır. Böylece, *Cohen'in* yaptığı iş bizi şu sonuca götürüyor:

1. Sürey hipotezini kabul eden; yani ω dan daha güçlü ve $\mathbb{R}$ den daha az güçlü bir kümenin olmadığı varsayımını kabul eden bir Kümeler Kuramı kurulabilir. Bu sistem kendi içinde çelişkisizdir.

2. Sürey hipotezini kabul etmeyen; yani ω dan daha güçlü ve $\mathbb{R}$ den daha az güçlü bir kümenin varlığını kabul eden bir Kümeler Kuramı kurulabilir. Bu sistem de kendi içinde çelişkisizdir.

3. Sürey hipotezini kabul eden sistemle etmeyen sistemler birbirlerinden farklı çelişkisiz sistemlerdir.

Cohen'in ortaya koyduğu gerçek, matematiğin temellerinin ne olduğunu araştıranlar için çok önemli olmuştur. Bu sonuç tamamen *öklityen ve öklityen olmayan geometrilere* benzer. Bilindiği gibi *"paraleller aksiyomu"* varsayılırsa *öklityen geometri* kurulmuş olur. Bu aksiyomun kabul edilmediği zaman öklityen olmayan geometriler kurulur. Öklityen olan ve olmayan geometriler kendi içlerinde çelişkisiz matematiksel sistemlerdir; ama birbirlerinden farklıdırlar.

Sayılamayan bir küme olarak $\mathbb{R}$ nin ilginç özelikleriyle karşılaştık. Kısa doğru uzun doğruya ve o da bütün gerçel eksene esgüçlü oldu. Bir kare bir kenarına, bir düzlem bir doğruya eşgüçlü oldu. Dilersek, bir küpün bir ayrıtı kadar noktaya sahip olduğunu gösterebiliriz. Hattâ, çekinmeden, bütün uzayın, bir atom çekirdeğinin yarıçapına eşgüçlü olduğunu söyleyebiliriz. Bütün bu kümelerin öğe sayıları $\mathbb{R}$ ninki kadardır. Öyleyse, doğal olarak şu soru aklımıza gelebilir.

Acaba gerçel sayılardan daha güçlü kümeler yok mudur?

Soruya *"vardır"* diye cevap vereceğiz. Hattâ, yalnız gerçel sayılar kümesinden değil, her kümeden daha güçlü kümeler vardır. Bunun böyle olduğunu yine *Cantor* gösteriyor.

Teorem 18.1.4. *[Cantor] hiç bir küme kendi kuvvet kümesine eşgüçlü olamaz.*

İSPAT: Olmayana ergi yöntemini uygulayacağız. A herhangi bir küme olsun. Bir $f : A \to \mathscr{P}(A)$ bbö fonksiyonunun varolduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $x \in A$ için $f(x) \in \mathscr{P}(A)$ olacaktır; yani $f(x)$, A nın bir alt kümesi olacaktır. A nın $f(x)$ alt kümesi x öğesini ya kapsar, ya kapsamaz. Buna göre,

$$X = \{x \mid x \in A,\, x \notin f(x)\} \tag{18.10}$$

kümesini tanımlayabiliriz. Tabii $X \subset A$, ve dolayısıyla $X \in \mathscr{P}(A)$ olacaktır. Oysa kabulümüze göre, $X = f(y)$ olacak şekilde bir $y \in A$ var olmalıdır. Öyleyse,

$$y \in X \Rightarrow y \notin f(y) \Rightarrow y \notin X \tag{18.11}$$

$$y \notin X \Rightarrow y \in f(y) \Rightarrow y \in X \tag{18.12}$$

olacaktır. Bu çelişki kabulümüzden gelmiştir. Demek ki A ile $\mathscr{P}(A)$ eggüçlü olamazlar. $\boxdot$

Teorem 18.1.5. *Her küme kendi kuvvet kümesinden daha az güçlüdür.*

İSPAT: A herhangi bir küme olsun. Bir

$$f : A \to \mathscr{P}(A)$$

fonksiyonunu, her $a \in A$ için

$$f(a) = \{a\}$$

diye tanımlayalım. Bu dönüşümün bbi olduğu apaçıktır. Öyleyse,

$$A \preccurlyeq \mathscr{P}(A)$$

olacaktır. Öte yandan, *Cantor Teoremi* gereğince

$$\neg(A \approx \mathscr{P}(A))$$

dır. Bu son iki bağıntıdan

$$A \prec \mathscr{P}(A)$$

18.2 PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşgüçlülükleri gösteriniz:

   (a) Bir küp bir ayrıtına eggüçlüdür.

   (b) Bir küp bir yüzüne eşgüçlüdür.

   (c) Uzay, kendi içindeki bir doğruya eşgüçlüdür.

   (d) Her $n \in \omega$ için $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$ dir.

   (e) Bir doğru bir yarım çembere eggüçlüdür.

   (f) Bir çokgenin kenarları, bu çokgenin içine çizilen bir çembere eşgüçlüdür.

2. Cebirsel olmayan gerçel sayılara *transandant sayılar* denilir. Gösteriniz ki bütün transandant sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ye eşgüçlüdür. Dolayısıyla *sayılamaz sonsuz* bir kümedir.

3. Bir A kümesinin sayılabilir sonsuz olması için gerekli ve yeterli koşul, sonsuz bir $B \subset A$ alt kümesi için $B \approx A$ olmasıdır. Gösteriniz.

18.3 TEMEL ÖZELİKLER

Bu kesimde, nicelik sayıları üzerinde yapılan aritmetiğe temel olan kümesel bağıntıları çıkaracağız.

18.3.1 Birleşim Fonksiyon

$f : A \to X$ ile $g : B \to Y$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu fonksiyonların tanım bölgeleri birbirlerinden ayrık iseler, yani $A \cap B = \emptyset$ ise $A \cup B$ bileşim kümesinden $X \cup Y$ bileşim kümesine bir $f \uplus g$ fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz:

$$f \uplus g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases} \tag{18.13}$$

$f \uplus g$ fonksiyonuna f ile g *fonksiyonlarının birleşimi (union)* denir.

Uyarı 18.3.1. $f \uplus g$ *bileşim fonksiyonu*, daha önce tanımladığımız $f \circ g$ *bileşke fonksiyonundan* tamamen farklıdır. İkisi birbirine karıştırılmamalıdır.

Teorem 18.3.1. *$f : A \cup C \to B$ ise $f = f_{|A} \uplus f_{|C}$ dir.*

İSPAT: Kısıtlı fonksiyon tanımından çıkar.
Bu teoremin karşıtını şöyle ifade edebiliriz.

Teorem 18.3.2. *$f : A \to B$, $g : C \to B$ ve $A \cap C = \emptyset$ ise $h = f \uplus g$ bileşimi aşağıdaki özeliklere sahiptir.*

(i) $h : A \cup C \to B$ fonksiyondur.

(ii) $h_{|_A} = f$ ve $h_{|_C} = g$ dir.

(iii)

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in C \end{cases} \tag{18.14}$$

İSPAT: $A \cap C = \emptyset$ olduğundan

$$x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow h(x) = f(x) \in B \\ x \notin A \wedge x \in C \Rightarrow h(x) = g(x) \in B \end{cases}$$

olur. O halde $x \in A \cup C \Rightarrow h(x) \in B$ dir ve *(iii)* sağlanır. Öte yandan $x = x'$ ise,

$$x \in A \Rightarrow h(x) = f(x) = f(x') = h(x')$$
$$x \in B \Rightarrow h(x) = g(x) = g(x') = h(x')$$

olacaktır. Bu demektir ki $x = x' \Rightarrow h(x) = h(x')$ özeliği sağlanıyor. O halde

$$h : A \cup C \leftrightarrow B$$

bir fonksiyondur; yani *(i)* sağlanır. Kısıtlı fonksiyon tanımını kullanırsak,

$$h_{|_A} = f \Leftrightarrow h(x) = f(x)$$
$$h_{|_C} = g \Leftrightarrow h(x) = f(x)$$

olur. Bu da *(ii)* nin sağlandığı anlamına gelir.

Tanım 18.3.1. A ile B herhangi iki küme olsun. A kümesinden B kümesine tanımlı olan bütün fonksiyonların kümesi B^A simgesiyle gösterilir:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\} \tag{18.15}$$

Önerme 18.3.1. *$f : A \to B$ ve $g : C \to D$ fonksiyonları bbö olsun. Eğer $A \cap C = \emptyset$ ve $B \cap D = \emptyset$ ise $f \uplus g : A \cup C \to B \cup D$ birleşimi bbö dir.*

İSPAT: $f : A \to B \cup D$ ve $g : C \to B \cup D$ birer fonksiyondur. Öyleyse, `Teorem` 18.3.2 uyarınca, $f \uplus g$ birleşiminin $A \cup C$ den $B \cup D$ ye bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü;

(i)

$$x \in A \Rightarrow \begin{cases} (x, y_1) \in graf(f \uplus g) & \Rightarrow y_1 = (f \uplus g)(x) = f(x) \\ (x, y_2) \in graf(f \uplus g) & \Rightarrow y_2 = (f \uplus g)(x) = f(x) \end{cases} \tag{18.16}$$

olacağından $y_1 = y_2$ çıkar.

(ii)

$$x \in C \Rightarrow \begin{cases} (x, y_1) \in graf(f \uplus g) & \Rightarrow y_1 = (f \uplus g)(x) = g(x) \\ (x, y_2) \in graf(f \uplus g) & \Rightarrow y_2 = (f \uplus g)(x) = g(x) \end{cases} \tag{18.17}$$

olacağından $y_1 = y_2$ çıkar.

(i) ve (ii) den

$$x = x' \Rightarrow f \uplus g(x) = f \uplus g(x') \tag{18.18}$$

çıkar. O halde $f \uplus g : A \cup C \to D \cup B$ bağıntısı bir fonksiyondur.

Şimdi $f \uplus g$ birleşimin bb olduğunu göstermek için

$$(f \uplus g)(x) = (f \uplus g)(x') \Rightarrow x = x'$$

olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten

(iii)

$$x, x' \in A \Rightarrow \begin{cases} (f \uplus g)(x) & = f(x) \\ (f \uplus g)(x') & = f(x') \end{cases}$$

olduğundan, sol yanların eşitliği, $f(x) = f(x')$ eşitliğini gerektirir. f fonksiyonu bb olduğundan, $x = x'$ olması gerekir.

(iv)

$$x, x' \in C \Rightarrow \begin{cases} (f \uplus g)(x) & = g(x) \\ (f \uplus g)(x') & = g(x') \end{cases}$$

olduğundan, sol yanların eşitliği, $g(x) = g(x')$ eşitliğini gerektirir. g fonksiyonu bb olduğundan, $x = x'$ olması gerekir.

(v)

$$(x \in A \wedge x' \in C) \Rightarrow \Big\{ (f \uplus g)(x) \neq (f \uplus g)(x')$$

olmak zorundadır, çünkü değer bölgeleri ayrıktır.

(iii) ,*(iv)* ve *(v)* bir araya getirilince, aradığımız (18.18) özeliği ortaya çıkar; yani $f \uplus g$ fonksiyonu bire-birdir.

Son olarak, birleşim fonksiyonunun örten olduğunu gösterelim. Herhangi bir $y \in B \cup D$ verilsin. $B \cap D = \emptyset$ olduğundan ya $y \in B$ ya da $y \in D$ olacaktır.

$y \in B$ ise, f fonksiyonu A dan B ye örten olduğu için $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. Öyleyse $y = (f \uplus g)(x)$ yazılabilir.

$y \in D$ ise, g nin C den D ye örten bir fonksiyon olduğu düsünülerek, yukarıdaki sonuca varılabilir.

Böylece $(f \uplus g)$ birleşiminin bbö olduğu gösterilmiş oldu.$\boxdot$

Sonuç 18.3.1. *$A \cap C = \emptyset$ ve $B \cap D = \emptyset$ olmak üzere, eğer $A \approx B$ ve $C \approx D$ ise $A \cup C \approx B \cup D$ olur.*

Önerme 18.3.2. *$A \approx B$ ve $C \approx D$ ise $A \times C \approx B \times D$ dir.*

İSPAT: Varsayım gereğince, $f : A \to B$ ve $g : C \to D$ bbö fonksiyonları vardır. Bir $h : A \times C \to B \times D$ bağıntısını şöyle tanımlayalım:

Her $(x, y) \in A \times C$ için $h(x, y) = (f(x), g(x))$ fonksiyonunun bbö bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

$$((a, c), (b, d)) \in graf(h) \Rightarrow (b, d) = h(a, c) = (f(a), g(c)) \tag{18.19}$$
$$((a, c), (b', d')) \in graf(h) \Rightarrow (b', d') = h(a, c) = (f(a), g(c)) \tag{18.20}$$

dir. f ve g birer fonksiyon olduklarından, bu, $(b, d) = (b', d')$ olmasını gerektirir. Öyleyse, h, [F2] koşulunu sağlıyor. [F1] koşulunu sağladığı apaçıktır. Demek ki h bir fonksiyondur.

Şimdi h fonksiyonunun bb olduğunu gösterelim. Eğer her $(a, c), (a', c') \in A \times C$ için

$$h(a, c) = h(a', c') \Rightarrow (a, c) = (a', c')$$

olduğunu gösterirsek, istediğimiz gey olacaktır. Gerçekten sol yandaki eşitlikten

$$(f(a), g(c)) = (f(a'), g(c'))$$

yazılabilir. f ile g, bb olduklarından,

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
$$g(c) = g(c') \Rightarrow c = c'$$

olması gerekir.

Son olarak h fonksiyonunun örten olduğunu gösterelim. Herhangi bir $(b, d) \in B \times D$ alalım. f nin A dan B ye, g nin C den D ye örten birer fonksiyon olduklarını dügünürsek,

$$(b = f(a)) \wedge (d = g(c))$$

olacak gekilde bir $a \in A$ ile bir $c \in C$ vardır. Öyleyse, $(a, c) \in A \times C$ dir ve $h(a, c) = (b, d)$ dir. $\boxdot$

Sonuç 18.3.2. *Bir düzlem üzerindeki noktaların sayısı, bu düzlem içindeki bir doğru üzerindeki noktaların sayısı kadardır.*

İSPAT:

$$\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R} \tag{18.21}$$

olduğunu göstermeliyiz. $(0, 1]$ aralığının $\mathbb{R}$ ye eşgüçlü olduğu kullanılırsa, `Teorem` 18.1.3 ile `Önerme` 18.3.2 den hemen çıkar. $\boxdot$

Önerme 18.3.3. *$A \approx B$ ve $C \approx D$ ise $A^C \approx B^D$ dır.*

İSPAT: Varsayımdan, $f : A \to B$ ve $g : D \to C$ bbö fonksiyonlarının olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi A^C den B^D ye bir h bağıntısını şöyle tanımlayalım: C den A ya her α fonksiyonu için; yani her $\alpha \in A^C$ için

$$h(\alpha) = f \circ \alpha \circ g$$

diyelim. $h(\alpha)) \in B^D$ olduğu apaçıktır. Öyleyse, h fonksiyonunun bbö olduğunu göstermemiz yetecektir. Bunu üç adımda göstereceğiz.

1.Adım: h, A^C den B^D ye bir fonksiyondur. Bunun için

$$(\alpha, y), (\alpha, y') \in graf(h) \Rightarrow y = y$$

olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten

$$(\alpha, y) \in graf(h) \Rightarrow y = h(\alpha) = f \circ \alpha \circ g \quad (18.22)$$

$$(\alpha, y') \in graf(h) \Rightarrow y' = h(\alpha) = f \circ \alpha \circ g \quad (18.23)$$

dir; yani $y = y'$ dür. Demek ki h, fonksiyon olma koşullarını sağlar.

2.Adım: h bb dir. Bunun için

$$h(\alpha) = h(\alpha') \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten sol yandaki eşitlik

$$f \circ \alpha \circ g = f \circ \alpha' \circ g$$

demektir. Eşitliğin her iki yanının soldan f^{-1} ile, sağdan g^{-1} ile bileşkesi alınırsa, istenen şey çıkar.

3.Adım: h örten bir fonksiyondur. Eğer her $\beta \in B^D$ için

$$h(\alpha) = \beta$$

olacak şekilde bir $\alpha \in A^C$ nin varlığını gösterebilirsek, istenen şey çıkmış olacaktır. Gerçekten

$$\alpha = f^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1}$$

nin isteneni sağladığı hemen görülür. ⊡

Önerme 18.3.4. *A, B, D kümeleri verilsin. Eğer $B \cap D = \emptyset$ ise*

$$A^B \times A^D \approx A^{B \cup D} \quad (18.24)$$

dir.

İSPAT: Herhangi bir $f \in A^B$ ile herhangi bir $g \in A^D$ alalım. Bu durumda $(f, g) \in A^B \times A^D$ olacaktır. Bu şekildeki her sıralı çifti $A^{B \cup D}$ ye ait $f \uplus g$ birleşim fonksiyonuna eşliyen bir σ bağıntısı düşünelim; yani $A^B \times A^D$ den $A^{B \cup D}$ ye

$$\sigma : (f, g) \to f \uplus g$$

bağıntısını tanımlayalım. Önermeyi ispatlamak için, bu bağıntının bbö bir fonksiyon olduğunu göstermek yetecektir. Bu işi üç adımda yapacağız.

1.Adım: σ, $A^B \times A^D$ den $A^{B\cup D}$ ye bir fonksiyondur.

$$((f,g),y) \in graf(\sigma) \Rightarrow y = \sigma(f,g) = f \uplus g \quad (18.25)$$
$$((f,g),y') \in graf(\sigma) \Rightarrow y' = \sigma(f,g) = f \uplus g \quad (18.26)$$

dir, ki buradan $y = y'$ çıkar. O halde σ fonksiyon olma koşullarını sağlar.

2.Adım: σ bb dir.

$$((f,g),(f,g')) \in A^B \times A^D$$

olmak üzere $\sigma(f,g) = \sigma(f',g')$ olsun. Buradan

$$f \uplus g = f' \uplus g'$$

çıkar. Öyleyse;

$$b \in B \Rightarrow f(b) = (f \uplus g)(b) = (f' \uplus g')(b) = f'(b)$$
$$d \in D \Rightarrow g(d) = (f \uplus g)(d) = (f' \uplus g')(d) = g'(d)$$

olacaktır, ki bu

$$f = f' \quad \text{ve} \quad g = g'$$

olmasını gerektirir. Demek ki

$$\sigma(f,g) = \sigma(f',g') \Leftrightarrow (f,g) = (f,g)$$

dür. Bu, σ fonksiyonunun bb olduğunu gösterir.

3.Adım: σ örten bir fonksiyondur.

Herhangi bir $h \in A^{B\cup D}$ seçelim. B ile D ayrık olduklarından, h nın B ye kısıtlaması ile h nın D ye kısıtlaması olan fonksiyonların birleşimi h ya eşit olacaktır; yani

$$(f = h_{|_B}) \wedge (g = h_{|_D}) \Rightarrow h = f \uplus g$$

dir. Bu durumda

$$\sigma(f,g) = f \uplus g = h$$

olur.

Önerme 18.3.5. *A, B, D herhangi üç küme ise*

$$A^D \times B^D \approx (A \times B)^D \quad (18.27)$$

dir.

İSPAT: $f_1 \in A^D$, $f_2 \in B^D$ olmak üzere bir $f \in (A \times B)^D$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$\forall x e D \quad \text{için} \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

Öyleyse,

$$\sigma : (f_1, f_2) \to f$$

dönüşümü $A^D \times B^D$ den $(A \times B)^D$ ye tanımlıdır. Şimdi bunun bbö bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

1.Adım: σ bb dir.

$$((f_1, f_2)), (g_1, g_2)) \in A^D \times B^D$$

olmak üzere

$$\sigma(f_1, f_2) = \sigma(g_1, g_2)$$

olduğunu varsayalım. Her $x \in D$ için $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ olmak üzere

$$f(x) = g(x)$$

yazabiliriz. Buradan

$$(f_1(x)), f_2(x)) = (g_1(x), g_2(x))$$

çıkar. Ohalde, her $x \in D$ için

$$f_1(x) = g_1(x), \; f_2(x) = g_2(x)$$

dir; yani

$$f_1 = g_1, \; f_2 = g_2$$

dir. Öyleyse,

$$\sigma(f_1, f_2) = \sigma(g_1, g_2) \Leftrightarrow (f_1, f_2)) = (g_1, g_2)$$

olur ki bu σ nın bb olması demektir.

2.Adım: σ örten bir fonksiyondur.

Herhangi bir $h \in (A \times B)^D$ seçelim. Her $x \in D$ için $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ olacak gekilde bir $h_1 : D \to A$ ile bir $h_2 : D \to B$ fonksiyonu vardır. Daha açıkçası, $A \times B$ den A ya ve $A \times B$ den B ye giden

$$(a, b) \longmapsto a \quad \text{ve} \quad (a, b) \longmapsto b$$

izdügüm fonksiyonlarını, sırasıyla, π_A ve π_B diye gösterirsek,

$$h_1 = \pi_A \circ h \quad \text{ve} \quad h_2 = \pi_B \circ h$$

olacaktır. Burada $h_1 \in A^D$ ve $h_2 \in B^D$ olduğu apaçıktır. Artık, σ nın tanımından,

$$\sigma : (h_1, h_2) \longmapsto h$$

olduğu hemen görülür.

Önerme 18.3.6. *A, B, D herhangi üç küme ise*

$$(A^B)^D \approx A^{B \times D} \tag{18.28}$$

dir.

İSPAT: Herhangi bir $F \in (A^B)^D$ verilsin. Her $d \in D$ için $F(d) \in A^B$ dir. B den A ya olan bu fonksiyonu kısaca f_d ile gösterelim; yani

$$f_d = F(d) \tag{18.29}$$

diyelim. Tabii, her $b \in B$ için $f_d(b) \in A$ dır. $B \times D$ den A ya bir f fonksiyonunu

$$f(b,d) = f_d(b) \tag{18.30}$$

ile tanımlayalım. O halde her $F \in (A^B)^D$ için yukarıdaki gibi tanımlanan bir $f \in A^{B\times D}$ fonksiyonu vardır. Böylece bir

$$\sigma : (A^B)^D \to A^{B\times D} \tag{18.31}$$

bağıntısını

$$\sigma : F \to f \tag{18.32}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu bağıntının bbö bir fonksiyon olduğunu gösterirsek ispat bitecektir.

1.Adım: Her $(b,d) \in B \times D$ için (18.30) nin sağ yanı A ya ait belirli bir öğedir. $F, F' \in (A^B)^D$ olsun. Eğer $F \neq F'$ ise, en az bir $d \in D$ için

$$F(d) \neq F'(d)$$

olur. Öyleyse (18.30) den

$$f_d = F(d) \neq F'(d) = f'_d$$

yazabiliriz. $f_d \neq f'_d$ olduğuna göre, en az bir $b \in B$ için $f_d(b) \neq f'_d(b)$ olacak demektir. Öyleyse, (18.30) den

$$f(b,d) = f_d(b) \neq f'_d(b) = f'(b,d)$$

yazılabilir. Demek ki $F \neq F'$ ise $\sigma(F) \neq \sigma(F')$ dür.

2.Adım: $\sigma(F) = \sigma(F')$ olduğunu varsayalım. (18.24) ten $f = f'$ çıkar. O halde, (18.30) den, her $d \in D$ için $f_d = f'_d$ ve dolayısıyla (18.29) den her $d \in D$ için $F(d) = F'(d)$ çıkar. Demek ki

$$\sigma(F) = \sigma(F') \Rightarrow F = F'$$

dür.

3.Adım: σ örten bir fonksiyondur.

Her hangi bir $g \in A^{B\times D}$ seçelim. Verilecek herhangi bir $d \in D$ ye karşılık bir $g_d \in A^B$ fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz:

$$g_d(b) = g(b,d)$$

Şu halde her $d \in D$ ye karşılık bir $g_d \in A^B$ bulabiliyoruz. Öyleyse,

$$d \longmapsto g_d$$

bağıntısını D den A^B ye bir fonksiyon olarak düşünebiliriz; yani

$$G(d) = g_d$$

dersek, G, D den A^B ye bir fonksiyon olacaktır, ki bu $G \in (A^B)^D$ olması demektir. ⊡

Önerme 18.3.7. *Her X kümesi için, X kümesinin kuvvet kümesi ile 2^X kümesi eşgüçlüdür.*

İSPAT:

$$\mathscr{P}(X) \approx 2^X \tag{18.33}$$

olduğunu göstermek için, $2 = \{0,1\}$ olduğunu düşünürsek, 2^X kümesi X den $\{0,1\}$ kümesine olan bütün fonksiyonlardan oluşan kümedir. Bir $A \subset X$ alt kümesinin χ_A ile gösterilen belirtgen (karekteristik) fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{18.34}$$

şeklinde tanımlanıyordu. Demek ki her $A \in \mathscr{P}(X)$ için

$$\chi_A \in 2^X \tag{18.35}$$

dır. Şimdi $\mathscr{P}(X)$ den 2^X kümesine

$$\forall A \in \mathscr{P}(X) \quad \text{için} \quad \gamma : A \longmapsto \chi_A$$

bağıntısını tanımlayalım; yani X kümesinin her alt kümesini bunun belirtgen fonksiyonuna eşleyen bağıntıya γ diyelim. Bunun bbö bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

1.Adım: γ bir fonksiyondur.

$$(A, y) \in graf(\gamma) \Rightarrow y = \gamma(A) = \chi_A \tag{18.36}$$
$$(A, y') \in graf(\gamma) \Rightarrow y' = \gamma(A) = \chi_A \tag{18.37}$$

dan $y = y'$ çıkar; yani γ bağıntısı [F2] koşulunu sağlar. [F1] koşulunu sağladığı ise, γ nın tanımından bellidir.

2.Adım: γ bb dir.

Her $A, B \in \mathscr{P}(X)$ için

$$\gamma(A) = \gamma(B) \Rightarrow \chi_A = \chi_B \Rightarrow A = B$$

dir, ki bu istenen şeydir.

3.Adım: γ örten bir fonksiyondur.

Herhangi bir $f \in 2^X$ seçelim. Eğer $A = f^{-1}(1)$ dersek, $\gamma(A) = f$ olacağı hemen görülür. ⊡

Önerme 18.3.8. *Esgüçlü iki kümenin kuvvet kümeleri de eşgüçlüdür.*

İSPAT: X ile Y herhangi iki küme olsun. Eğer $X \approx Y$ ise, `Önerme` 18.3.3 ve `Önerme` 18.3.6 önermeleri gereğince,

$$\mathscr{P}(X) \approx 2^X \approx 2^Y \approx \mathscr{P}(Y)$$

çıkar. Eşgüçlülük geçişli olduğundan,

$$X \approx Y \Rightarrow \mathscr{P}(X) \approx \mathscr{P}(Y)$$

olur. ⊡

18.4 ALIŞTIRMA

1. $\{A_i \,|\, i \in I\}$ ve $\{B_j \,|\, j \in I\}$ aileleri veriliyor. Eğer her $\imath \in I$ için $A_\imath \approx B_\imath$ ise

$$\bigcup_{\imath \in I} A_\imath \approx \bigcup_{\imath \in I} B_\imath \tag{18.38}$$

$$\prod_{\imath \in I} A_\imath \approx \prod_{\imath \in I} B_\imath \tag{18.39}$$

   olduğunu gösteriniz.

2. *(Cantor Kümesi)* 1883 yılında Alman matematikçi *Georg Cantor* tarafından açıklanan, ama daha önce 1875 yılında *Henry John Stephen Smith* tarafından kurgulandığı anlaşılan bu küme, ölçüm kuramında ve topolojide ilginç özeliklere sahiptir.

   Küme şöyle kurgulanıyor. İlk adımda $[0, 1]$ aralığının ortasından üçte biri atılıyor. İkinci adımda geriye kalan iki alt aralığın ortalarındaki üçte birlik aralıkları atılıyor. Üçüncü adımda geriye kalan dört alt aralığın ortalarındaki üçte birlik aralıkları atılıyor. Bu eylem sonsuz kez tekrarlanırsa, geriye kalan kümeye *Cantor kümesi* (Cantor ternary set) denilir.

   Cantor kümesinin ilginç özeliklerinden bazıları şunlardır:

   (a) n -inci adımda kalan aralıkları veren bir yinelge formülü kurulabilir.

   (b) Boş küme değildir.

   (c) Sayılamaz sonsuz bir kümedir.

   (d) Her adımda atılan üçte birlik aralıkların toplam uzunluğu 1 dir.

   (e) Salt topolojiye göre kapalı bir kümedir.

(f) Salt topolojiye göre tam bir metrik uzaydır.

(g) Tamamen sınırlı bir kümedir.

(h) Tıkız bir kümedir.

(i) Her noktası bir yığılma noktasıdır.

(j) Hiç bir iç noktası yoktur.

(k) Hiç bir yerde yoğun değildir.

Bunları göstermeyi deneyiniz.

YOL GÖSTERME: Ardışık adımlarda geriye kalan aralıklar şunlardır:

1.Adım: $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

2.Adım: $[0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]$

$\ldots$

$\ddots$

n -inci adımda atılan küme

$$C_n = \left(\frac{C_{n-1}}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)$$

Eyleme böyle devam edersek, geriye kalan kısımda hiç bir aralık olamaz. Olsaydı, bir sonraki adımda onun da ortasındaki üçte birlik kısım atılacaktı. Bu nedenle, geriye kalan kısma, yani Cantor kümesine *Cantor tozu* adı da verilir. Ölçüm kuramında bu kümenin ölçümünün 0 olduğu şöyle gösterilir. Her adımda atılan kısımların uzunluğunu biliyoruz. Bunları toplarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 \qquad (18.40)$$

olur. $[0, 1]$ aralığının ölçümü (uzunluğu) 1 olduğuna göre geriye kalan Cantor tozunun ölçümü 0 olmalıdır.

3. Katsayıları rasyonel sayılar olan bir polinomun kökü olan sayıya *cebirsel sayı* denir. Cebirsel olmayan sayılara *transandant sayılar* denilir.

   (a) Cebirsel sayıların sayılabilir olduğunu gösteriniz.

   (b) Transandant sayıların sayılamaz olduğunu gösteriniz.