11. Yakınsak Dizi Örnekleri II

Yakınsaklık konusunu birkaç örnekle perçinleyelim. Örneklerden bazılarını geçmişte görmüştük ama burada değişik yöntemler deneyeceğiz.

Örnekler

11.1. *Eğer* $a > 0$ *ise* $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.
Kanıt: Eğer $a = 1$ ise kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle $a \neq 1$ olsun.
$a > 1$ durumunda eşitliği kanıtlamamız yeterli, nitekim bu durumda kanıtladığımızı varsayarsak, $0 < a < 1$ ise, $b = 1/a$ olsun; o zaman $b > 1$ olur ve

$$\lim a^{1/n} = \lim \frac{1}{b^{1/n}} = \frac{1}{\lim b^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1$$

elde ederiz.
Bundan böyle $a > 1$ eşitsizliğini varsayalım.
$(a^{1/n})_n$ dizisi azalan bir dizidir, çünkü

$$a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliğinin taraflarının $n(n+1)$'inci kuvvetini alırsak, bu eşitsizlikle,

$$a^n < a^{n+1}$$

eşitsizliğinin birbirine denk olduklarını görürüz; ama $a \geq 1$ olduğundan bu son eşitsizlik doğrudur. $(a^{1/n})_n$ dizisi aynı zamanda pozitif bir dizi olduğundan, dizi yakınsaktır.
Şimdi de dizinin limitini bulalım. Dizinin limitine x diyelim. $a^{1/n} > 1$ olduğundan, $x \geq 1$'dir. $(a^{1/2n})_n$ dizisi $(a^{1/n})_n$ dizisinin altdizisi olduğundan, $(a^{1/2n})_n$ dizisi de x'e yakınsar. Bu zekice gözlemden x'i bulacağız.

$$x^2 = (\lim a^{1/2n})^2 = \lim a^{2/2n} = \lim a^{1/n} = x$$

eşitliğinden dolayı, $x^2 = x$ buluruz. Ama $x \geq 1$ olduğundan, buradan $x = 1$ çıkar.

11.2. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.
Kanıt: Dizinin bir zaman sonra azalan olduğunu kanıtlarsak o zaman dizinin yakınsak olduğunu da kanıtlamış oluruz. Kanıtlayalım.

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliğinin her iki tarafının da $n(n+1)$'inci gücünü alacak olursak, bu eşitsizlikle,

$$(n+1)^n \leq n^{n+1}$$

eşitsizliğinin denk olduklarını görürüz. Şimdi bu son eşitsizliği n^n'ye bölecek olursak, bu son eşitsizlikle,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

eşitsizliğinin denk olduklarını görürüz. Ama sol taraftaki

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

terim n sonsuza gittiğinde (e sayısına) yakınsar, bunu geçen sayımızda görmüştük, dolayısıyla bir zaman sonra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

eşitsizliği doğru olur.

Dizinin yakınsak olduğunu artık biliyoruz. Limite x diyelim. Dizinin terimleri de x_n olsun:

$$x_n = n^{1/n} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = x \geq 1.$$

Ama $(x_{2n})_n$, $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi, dolayısıyla bu altdizinin limiti de x olmalı. Bu zekice gözlemi ve Örnek 11.1'i de kullanarak x'i bulacağız:

$$\begin{aligned} x &= \lim x_{2n} = \lim (2n)^{1/2n} = \lim(2^{1/2n} n^{1/2n}) = \lim((\sqrt{2})^{1/n}(n^{1/n})^{1/2}) \\ &= \lim(\sqrt{2})^{1/n} \lim(n^{1/n})^{1/2} = \lim(n^{1/n})^{1/2} = (\lim n^{1/n})^{1/2} = x^{1/2}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $x^2 = x$ ve $x \geq 1$ olduğundan, $x = 1$ bulunur.

11.3. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e.$$

olduğundan, yeterince büyük n için,

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \leq (e+\epsilon)^{1/n}$$

olur. Örnek 11.1'e göre en sağdaki dizi 1'e yakınsadığından, istediğimiz sonuç Sandviç Teoremi'nden çıkar (Teorem 5.1).

11.4. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$.

Kanıt: $e - 1 > \epsilon > 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

olduğundan, yeterince büyük n için,

$$(e-\epsilon)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

olur. $e - \epsilon > 1$ olduğundan, en soldaki terim sonsuza gider.

11.5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{1+n}\right)^n = \frac{1}{e^2}$.

Kanıt: Aşağıda. (Okun, yani $\to$ iminin anlamı belli: n sonsuza giderken dizinin limiti anlamına geliyor.)

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1}{1+n}\right)^n &= \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \times \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-1} \longrightarrow e^{-2} \times 1 = e^{-2}. \end{aligned}$$

11.6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{7+4n}\right)^n = 0.$

Kanıt: Parantezin içindeki ifade 1'den küçük olan 3/4'e yakınsar. Eğer $3/4 < a < 1$ ise, belli bir aşamadan sonra,

$$0 \le \left(\frac{3n-5}{7+4n}\right)^n < a^n$$

olur ve sağ taraf 0'a yakınsadığından sonuç bulunur.

11.7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{7+3n}\right)^n = e^{-4}.$

Kanıt: n değişkenini değiştirerek (önce $m = 7+3n$, sonra $p = m/3$) limiti alınması gereken ifadeyi daha aşina olduğumuz bir şekle getirelim:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3n-5}{7+3n}\right)^n &= \left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{m-7}{3}} = \left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{-7}{3}}\left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{m}{3}}\\ &\simeq \left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{m}{3}} = \left(\frac{3p-12}{3p}\right)^p = \left(1-\frac{4}{p}\right)^p \simeq e^{-4}.\end{aligned}$$

(Bkz. Teorem 10.5.) Buradaki $\simeq$ işareti "aynı limiti var" anlamına gelmektedir.

Alıştırmalar

11.8. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n},\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^{2n}.$$

11.9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ve $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$ limitlerini hesaplayın.

11.10. $(n!/n^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını ve 1'den küçük olduğunu kanıtlayın. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

11.11. $a_1 = \sqrt{6}$ ve $k \ge 1$ için,

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k}$$

olsun. a_2, a_3 ve a_4'ü yazın. $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ eşitliğini kanıtlayın. **İpucu:** Dizi artar ve 6'dan küçüktür.

11.12. $a \ge 0$, $a_1 = \sqrt{a}$ ve $k \ge 1$ için,

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için a'nın alabileceği değerleri bulun.