8. Gerçel Sayıların Tamlığı

Yakınsak bir dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu Teorem 7.7'de kanıtlamıştık. Bu bölümde her Cauchy dizisinin (gerçel sayılar kümesinde) yakınsak olduğunu kanıtlayacağız. Önce altdizi kavramından başlayacağız, ana teoremimizi ikinci altbölümde kanıtlayacağız.

8.1 Altdiziler

Herhangi bir dizi ele alalım:

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots$$

ve bu dizinin içinden göstergeci çift olan terimleri seçelim:

$$x_0,\, x_2,\, x_4,\, x_6,\, \ldots$$

Bu ikinci dizi, birincisinin ***altdizisidir***. Bir başka altdizi, göstergeci asal olan terimlerden seçilebilir:

$$x_2,\, x_3,\, x_5,\, x_7,\, x_{11},\, \ldots$$

Ya da dizinin ilk birkaç terimini silip bir başka altdizi elde edebiliriz:

$$x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, \ldots$$

Öte yandan,

$$x_3,\, x_2,\, x_5,\, x_7,\, x_{11},\, \ldots$$

dizisi yukardaki ilk dizinin bir altdizisi olmayabilir, çünkü göstergeçler artan bir biçimde seçilmemiş, ilk iki terimde terslik var. Ancak x_3 terimi x_0 ya da x_1'e eşitse bu dizi birinci dizinin bir altdizisi olabilir. Eğer x_3 terimi x_0, x_1 ya da x_2'ye eşit değilse

$$x_3,\, x_3,\, x_5,\, x_7,\, x_{11},\, \ldots$$

dizisi de en baştaki dizinin bir altdizisi olmayabilir.

Tanımı hissettirdikten sonra matematikselleşelim. Bir $(x_n)_n$ dizisi verilmiş olsun. Ayrıca, sürekli artan, yani her k için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi verilmiş olsun. O zaman, $(x_{n_k})_k$ dizisine $(x_n)_n$ dizisinin ***altdizisi*** adı verilir.

Eğer $y_k = x_{n_k}$ tanımını yaparsak, $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ olur ve böylece alışık olduğumuz $(y_k)_k$ yazılımına kavuşuruz.

Tanımı şöyle de verebilirdik. $A \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz bir altküme olsun. O zaman, göstergeçlerine göre doğal olarak sıralanmış $(x_k)_{k \in A}$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir. Örneğin $A = 2\mathbb{N}$ ise, elde ettiğimiz altdizi x_0, x_2, x_4, $x_6, \ldots$ altdizisi olur.

Bir başka deyişle, bir altdizi, bir

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots$$

dizisinden bazı terimlerin atılmasıyla elde edilen bir dizidir. Örneğin, yukardaki diziden bazı terimleri silerek,

$$\cancel{x_0},\ x_1,\ \cancel{x_2},\ x_3,\ x_4,\ \cancel{x_5},\ x_6,\ \ldots$$

altdizisini, yani

$$x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_6, \ldots$$

altdizisini elde ederiz.

Eğer şansımız yaver gider de, $x_3 = x_0$ ya da $x_3 = x_1$ olursa, o zaman,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olur, yoksa olmaz.

Altdizilerde sık sık kanıtı çok basit olan şu olgu kullanılır: Kesin artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi için, $k \le n_k$ olur. Bunu k üzerine tümevarımla kanıtlayabiliriz. Eğer $k = 0$ ise sorun yok, çünkü ne de olsa doğal sayı dizilerinden sözediyoruz. Eğer $k \ge 0$ ise ve $k \le n_k$ ise, o zaman,

$$k + 1 \le n_k + 1 \le n_{k+1}$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

İlk teoremimizde bu olguyu kullanacağız.

Teorem 8.1. *Bir Cauchy dizinin her altdizisi Cauchy'dir.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir Cauchy dizisi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Şimdi eğer k, $\ell > N$ ise $N < k \le n_k$ ve $N < \ell \le n_\ell$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| < \epsilon$$

olur. Bu da bizim kanıtlamak istediğimizdi. □

Benzer sonuç yakınsak diziler için de geçerlidir.

Teorem 8.2. *Yakınsak bir dizinin altdizisi de yakınsaktır ve iki dizi aynı limite yakınsarlar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir a sayısına yakınsayan bir dizi olsun, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Şimdi eğer $k > N$ ise $N < k \leq n_k$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Yukardaki teoremin tersi yanlıştır elbet, yani yakınsak bir altdizinin varlığı dizinin yakınsak olduğu anlamına gelmez, mesela $((-1)^n)_n$ dizisinin, sabit 1 dizisi ve sabit -1 dizisi olmak üzere iki altdizisi vardır. Ancak şu teorem geçerlidir:

Teorem 8.3. *$(x_n)_n$ bir dizi ve A ve B, bileşimleri $\mathbb{N}$ olan iki sonsuz altküme olsun. Eğer $(x_n)_{n\in A}$ ve $(x_n)_{n\in B}$ altdizileri yakınsaksa ve aynı sayıya yakınsıyorlarsa o zaman $(x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve bu ortak limite yakınsar.*

Kanıt: Ortak limite ℓ diyelim. $\epsilon > 0$ olsun. Varsayıma göre

$$(n \in A \text{ ve } n > N_A) \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon$$

ve

$$(n \in B \text{ ve } n > N_B) \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon$$

önermelerini sağlayan N_A ve N_B sayıları vardır. $N = \max\{N_A, N_B\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, $|x_n - \ell| < \epsilon$ olur. □

Şimdi yukardakilerden daha zor ve daha fazla uygulaması olan bir sonuç kanıtlayacağız.

Teorem 8.4. *Bir Cauchy dizisinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir Cauchy dizisi olsun. $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin yakınsak bir altdizisi olsun, diyelim a'ya yakınsasın. $(x_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız.

$\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. $|x_n - a|$ sayısının bir zaman sonra, yani belli bir göstergeçten sonra ϵ'dan küçük olduğunu göstereceğiz. Her zaman yaptığımız gibi,

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için, soldaki $|x_n - a|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadeyi bildiğimiz **küçük** ifadeler cinsinden üstten sınırlayacağız.

k herhangi bir doğal sayı olsun. Üçgen eşitsizliğinde

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

elde ederiz. En sondaki

$$|x_n - x_{n_k}| \text{ ve } |x_{n_k} - a|$$

ifadelerinin her birini küçültmeye çalışmalıyız. Birinci ifade $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, ikinci ifade ise $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından küçülür. Ayrıntılar önemli, ayrıntıları yazalım. Her iki ifadeyi de $\epsilon/2$'den küçük yapacağız.

Birinci ifadeden başlayalım. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2$$

olur. Demek ki eğer k, $n > N$ ise, $n_k \ge k > N$ olur ve

$$|x_n - x_{n_k}| < \epsilon/2$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci ifadeye geçelim. $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi k, hem N'den hem de N_1'den büyük herhangi bir sabit göstergeç olsun. Her $n > k$ için,

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

elde ederiz. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnekler

8.1. *$a > 0$ ise $\lim_{n\longrightarrow\infty} a^{1/n} = 1$ olur.*

Kanıt: Gerekirse a yerine $1/a$ alarak $a > 1$ varsayımını yapabiliriz. Bu varsayımla $a^{n+1} > a^n > 1$ çıkar, dolayısıyla dizi azalır. Bundan da dizinin 1'den büyükeşit bir limiti olduğu çıkar. Limite x diyelim $(a^{1/2n})_n$ dizinin bir altdizisidir, dolayısıyla Teorem 8.4'e göre x'e yakınsar. Öte yandan $a^{1/2n} = \sqrt{a^{1/n}}$ olduğundan aynı dizi $\sqrt{x}$'e de yakındar. Demek ki $x = \sqrt{x}$ ve $x = 1$. □

8.2. $\lim_{n\longrightarrow\infty} n^{1/n} = 1$ *olur.*
Kanıt: Önce dizinin zamanla azalan olduğunu, yani $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)}$, yani $n^{n+1} > (n+1)^n$, yani

$$n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliğinin zamanla doğru olduğunu kanıtlayalım. Ama Önsav 3.23'ten dolayı bu son eşitsizliği $n \geq 4$ için biliyoruz. Demek ki dizi zamanla azalır ve dizinin 1'den büyükeşit bir limiti vardır. Limite x diyelim. Terimleri $(2n)^{1/2n}$ olan dizi bu dizinin bir altdizisi olduğundan Teorem 8.4'e göre bu altdizi de x'e yakınsar. Öte yandan

$$(2n)^{1/2n} = 2^{1/2n} n^{1/2n}$$

olduğundan, Örnek 8.1'e göre aynı dizi $\sqrt{x}$'e de yakındar. Demek ki $x = \sqrt{x}$ ve $x = 1$. □

8.3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ *limitini bulun.*
Birinci Çözüm: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ eşitliğinden ve yukardaki iki alıştırmadan sonuç kolaylıkla 1 bulunur.
İkinci Çözüm: $n \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq n \times n^2 = n^3$ eşitsizliklerinden ve yukardaki alıştırmadan kolaylıkla çıkar.

8.4. [A] $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ *ve her* $n \geq 1$ *için,*

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n} + a_{2n-1}}{2} \text{ ve } a_{2n+2} = \frac{a_{2n}a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$$

olsun. $(a_n)_n$ *dizisinin* 4*'e yakınsadığını kanıtlayın.*
Çözüm: İkinci formülden her $n \geq 1$ için $a_{2n+1}a_{2n+2} = a_{2n-1}a_{2n}$ eşitliği çıkar, demek ki $a_{2n-1}a_{2n} = a_1 a_2 = 2 \times 8 = 16$, yani

$$a_{2n-1} = \frac{16}{a_{2n}}. \tag{1}$$

Buradan ve birinci formülden, kolaylıkla,

$$a_{2n+2} = 32\frac{a_{2n}}{a_{2n}^2 + 16}$$

bulunur. $b_n = a_{2n}$ olsun. O zaman $(b_n)_n$ dizisi $(a_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir ve $b_1 = a_2 = 8$ ve

$$b_{n+1} = 32\frac{b_n}{b_n^2 + 16} \tag{2}$$

olur. (2)'den kolaylıkla,

$$b_{n+1} \geq b_n \Leftrightarrow b_n \leq 4$$

çıkar. Ne yazık ki b_1'in 4'ten küçükeşit olduğu doğru değil, ama

$$b_2 = 32\frac{b_1}{b_1^2 + 16} = 32\frac{8}{8^2 + 16} = \frac{16}{5} \leq 4$$

olur. Bakalım b_n terimleri bir zaman sonra hep 4'ten küçük oluyor mu? (2) kullanılarak yapılan kolay bir hesapla

$$b_{n+1} \leq 4 \Leftrightarrow (b_n - 4)^2 \geq 0$$

bulunur. Demek ki $(b_n)_n$ dizisi $n = 2$'den sonra artan ve 4 tarafından üstten sınırlı, dolayısıyla bir limiti var. (1)'e göre bu limit

$$x = 32\frac{x}{x^2 + 16}$$

eşitliğini sağlamalı, yani limit 4 olmalı. Demek ki

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 4.$$

(1)'den dolayı $(a_{2n+1})_n$ dizisinin de limiti var ve bu limit de $16/4 = 4$'e eşit. Teorem 8.3'e göre $(a_n)_n$ dizisi yakınsaktır ve 4'e yakınsar. □

8.5. *Artan bir dizinin yakınsak bir altdizisi varsa, dizinin de limiti olduğunu ve limitlerin eşit olduklarını kanıtlayın.*

Kanıt: $(a_n)_n$ artan bir dizi olsun. Artan bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu için, $(a_{f(n)})_n$ altdizisinin a'ya yakınsadığını varsayalım. $(a_n)_n$ dizisinin limitinin a olduğunu kanıtlayacağız. Bu amaçla bir $\epsilon > 0$ seçelim. Öyle bir M seçelim ki her $n > M$ için

$$a - \epsilon < a_{f(n)} < a + \epsilon$$

olsun. $N = f(M+1)$ ve $n > N$ olsun. O zaman, $M + 1 > M$ olduğundan,

$$a_n \geq a_N = a_{f(M+1)} > a - \epsilon$$

olur. Bu, kanıtlamak istediğimizin yarısıydı. Şimdi diğer yarıyı kanıtlayalım. Hâlâ daha $n > N$. Diyelim $a_n \geq a + \epsilon$. O zaman, $n \leq f(n)$ eşitsizliğinden dolayı,

$$a + \epsilon \leq a_n \leq a_{f(n)}$$

olur. Ama $n > N = f(M+1) \geq M + 1 > M$ olduğundan bu bir çelişkidir. Demek ki $a_n < a + \epsilon$. □

Alıştırmalar

8.6. Her altdizisinin dizinin kendisine eşit olduğu diziler hangi dizilerdir?

8.7. Sadece iki altdizisi olan tüm dizileri bulun.

8.8. Tüm kesirli sayıları içeren bir dizi var mıdır?

8.9. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsasın. Bu iki diziyi şu yöntemle karalım: A ve B, $\mathbb{N}$'nin $\mathbb{N} = A \cup B$ eşitliğini sağlayan iki ayrık ve sonsuz altkümesi olsun.

$$f : A \to \mathbb{N} \text{ ve } g : B \to \mathbb{N}$$

iki artan eşleme olsun. (f ve g biriciktirler.)

$$z_n = \begin{cases} x_{f(n)} & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ y_{g(n)} & \text{eğer } n \in B \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Böylece $(z_n)_n$ dizisini elde ederiz. Örneğin,

$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, \ldots$$

bu yöntemle elde edilmiş bir dizidir ve burada $A = 2\mathbb{N}$, $B = 2\mathbb{N} + 1$ alınmıştır. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için $a = b$ eşitliğinin gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayın.

8.10. Eğer her n için $x_n \leq x_{n+1}$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $(x_n)_n$ dizisine ***artan dizi*** adını veriyoruz. ***Azalan dizi*** de benzer şekilde tanımlanır. Her dizinin ya azalan ya da artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. (Sonraki iki alıştırmaya bakabilirsiniz.)

8.11. $(a_n)_n$, en büyük terimi olmayan bir diziyse $(a_n)_n$'nin artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın; yani öyle artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisinin olduğunu gösterin ki, her k için, $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ olsun.

8.12. $(a_n)_n$ bir dizi olsun. İlk k terimi atarak $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ altdizisini elde ederiz. Bu diziye $(a_n)_n$ dizisinin k-kesilmiş altdizisi diyelim. Eğer $(a_n)_n$ dizisinin her k-kesilmiş altdizisinin bir en büyük terimi varsa ve bu terime q_k adını verirsek, o zaman $(q_k)_k$ dizisinin $(a_n)_n$ dizisinin azalan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. (Bu altdizi elbette $(a_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir.)

8.13. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ dizisinin altdizileri kümesinin kardinalitesi kaçtır?

8.14. Sınırlı bir dizinin bir Cauchy altdizisi olduğunu kanıtlayın.

8.15. Yazı gelene kadar yazı-tura atıyorsunuz. Ortalama kaç kez para atarsınız?

8.16. Yazı-tura atıyorsunuz. Yazı gelirse 1 puan, tura gelirse 0 puan alıyorsunuz. Ortalama kaç atışta n puanı tutturursunuz?

8.17. Sandviç Teoremi'nin şu daha genel versiyonunu kanıtlayın: *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ eşitsizlikleri sonsuz sayıda n için doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlarsa, $(y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve diğer dizilerle aynı sayıya yakınsar.*

8.18. Bölüm 7'nin sonundaki alıştırmalara yeniden göz atın. Belki şimdi bazılarını daha kolay yapabilirsiniz.

8.2 Gerçel Sayıların Tamlığı

Yakınsak bir dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu Teorem 7.7'de kanıtlamıştık. Bu altbölümde her Cauchy dizisinin (gerçel sayılar kümesinde) yakınsak olduğunu kanıtlayacağız:

Teorem 8.5. *Her Cauchy dizisinin $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır.*

Aynı olgu kesirli sayılar kümesi için geçerli değildir, yani Cauchy dizisi olan ama limiti kesirli sayı olmayan kesirli sayı dizileri vardır. Henüz kanıtlamadık ama genel terimi $(1 + 1/n)^n$ olan dizi böyle bir dizidir. [N2, Bölüm 7B]'de,

$$x_0 = 1 \text{ ve } x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

olarak tanımladığımız kesirli sayı dizisinin kesirli bir sayı olmayan $\sqrt{2}$'ye yakınsadığını görmüştük; aynı örneğin daha genelleşmiş halini Altbölüm 9.1'de göreceğiz. Demek ki yukardaki teoremi kanıtlamak için, gerçel sayılara özgü, kesirli sayılarda doğru olmayan bir olgu kullanılmalı. Bu olgu da ancak (SUP) aksiyomu olabilir.

Teorem 8.5'in Kanıtı: Aslında bu aşamada teoremin kanıtı oldukça kolay. $(x_n)_n$ verilmiş bir Cauchy dizisi olsun. Kanıtımız için şu aşamalardan geçeceğiz:

1. $(x_n)_n$'nin monoton bir $(y_n)_n$ altdizisini bulacağız.

2. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır (Teorem 7.10). Demek ki $(y_n)_n$ altdizisi de sınırlıdır.

3. Monoton ve sınırlı olduğundan, $(y_n)_n$ dizisi yakınsaktır (Sonuç 7.4).

4. Yukardaki maddeden $(x_n)_n$'nin yakınsak olduğu çıkar (Teorem 8.4).

2, 3 ve 4'üncü aşamalardan zaten geçmişiz ve sadece birinci aşamayı kanıtlamak kalmış. Kanıtlayalım.

Teorem 8.6. *Her dizinin monoton bir altdizisi vardır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ herhangi bir dizi olsun. Eğer bir n göstergeci için, $a_n \leq a_m$ eşitsizliği n'den büyük her m göstergeci için sağlanıyorsa, n'ye, bu kanıtlık, "iyi göstergeç" diyelim. Eğer sonsuz sayıda iyi göstergeç varsa artan bir altdizi seçmek kolaydır: $(a_k)_k$ artan bir altdizidir. Eğer sonlu sayıda iyi göstergeç varsa ve N iyi göstergeçlerin sonuncusuysa, her $n > N$ için, $a_n > a_m$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $m > n$ vardır. Bu durumda da (kesin) azalan bir altdizi kolaylıkla bulunur. □

Teorem 8.5, "$\mathbb{R}$ **tamdır**" olarak ifade edilir.

Alıştırmalar

8.19. $r \in (0, 1)$ olsun. $(nr^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını kanıtlayın. Bundan dizinin limiti olduğunu çıkarın. Bundan da limitin 0 olduğunu kanıtlayın.

8.20. $r \in (0, 1)$ olsun. Terimleri
$$x_n = r + 2r^2 + \cdots + nr^n$$
olan dizinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayın.

Okuma parçası: Onluk Tabanda Açılım

Ta ilkokuldan beri gerçel sayıları
$$56{,}4593729889376283\ldots$$
gibi onluk tabanda yazmışızdır. Bu o kadar içimize işlemiştir ki, birçok kişi bu tür ifadeleri gerçel sayıların tanımı olarak kabul eder. Gerçekten de böyle öğretilmiştir ilk ve ortaöğretimde ve bu yüzden de birçok kişi anlaşılır (hatta haklı!) ama yanlış olarak 0,9999... sayısını 1'den küçük zanneder. Ama bu kitapta gerçel sayıları böyle onluk tabanda yazılmış biçimde vermedik. Gerçel sayıları aksiyomatik olarak tanımladık. Dolayısıyla bizim tanımladığımız gerçel sayılar kümesiyle ilkokul öğretmeninin tanımladığı gerçel sayılar kümesinin aynı kümeler olup olmadığı yanıtı merakla beklenen bir soru olmalıdır!

$x \geq 0$, herhangi bir doğal sayı olsun. x'in,
$$56{,}4593729889376283\ldots$$
gibi yazılan bir ifadeye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Şimdilik hem
$$56{,}4593729889376283\ldots$$
ifadesinin ne demek olduğunu bildiğimizi, hem de
$$x = 56{,}4593729889376283\ldots$$

eşitliğini varsayalım ve sağdaki sayının 56'sını ve virgülden sonraki rakamlarını x cinsinden teker teker bulalım. En baştaki 56'nın x cinsinden nasıl yazılacağı belli: 56, x'in tamkısmıdır (bkz. Teorem 2.8'den önceki paragraf):

$$56 = [x] \, .$$

56'yı başarıyla bulduk.

Ya virgülden sonraki ilk rakam olan 4'ü nasıl buluruz? Oldukça kolay:

$$x - [x] = 0{,}4593729889376283\ldots$$

olduğundan,

$$10\,(x - [x]) = 4{,}593729889376283\ldots$$

olur ve

$$[10\,(x - [x])] = [4{,}593729889376283\ldots] = 4$$

buluruz.

Yukardaki yöntem,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

rakamları için,

$$0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olarak yazılan sayının a_1'ini buluyor: Eğer $a = 0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ ise,

$$a_1 = [10\,(a - [a])]$$

olur.

Bu yöntemi tekrar tekrar uygulayarak x'in rakamlarını teker teker bulabiliriz. Bunun için şu tanımları yapalım:

$$\begin{array}{ll}
x_0 = x = 56{,}4593729889376283\ldots, & a_0 = [x_0] = 56,\\
x_1 = 10(x_0 - a_0) = 4{,}593729889376283\ldots, & a_1 = [x_1] = 4,\\
x_2 = 10(x_1 - a_1) = 5{,}93729889376283\ldots, & a_2 = [x_2] = 5,\\
x_3 = 10(x_2 - a_2) = 9{,}3729889376283\ldots, & a_3 = [x_3] = 9,\\
x_4 = 10(x_3 - a_3) = 3{,}729889376283\ldots, & a_4 = [x_4] = 3,\\
\ldots &
\end{array}$$

Böylece x sayısının onluk tabanda gösteriminin

$$56,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ 7,\ \ldots$$

rakamlarının her birini x cinsinden yazabiliriz. Bu rakamlara, yukarda yaptığımız gibi,

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

adlarını verelim. Şimdi de,

$$a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olarak yazacağımız sayıyı tanımlayalım. Örnek 8.49'da, terimleri,

$$y_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

olarak tanımlanan $(y_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamıştık. Teorem 8.5'te ise, her Cauchy dizisinin gerçel sayılarda bir limiti olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki $(y_n)_n$ dizisinin gerçel sayılarda bir limiti vardır. Şimdi

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

teriminin tanımını verebiliriz:

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Birazdan bu limitin en başta başladığımız sayı olan x olduğunu kanıtlayacağız. Önce tanımları tekrarlayalım ve bir örnek verelim.

Tanım. $a_0 \in \mathbb{N}$ ve $i > 0$ için $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ olsun.

$$y_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

olsun. O zaman $(y_n)_n$ bir Cauchy dizisidir; dolayısıyla bir limiti vardır. Bu limit,

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olarak yazılır. Demek ki, tanım gereği,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots\right) = a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olur.

Örnek 8.21. Teorem. $0{,}9999\ldots = 1$.

Kanıt: Yukardaki tanıma göre, soldaki sayı, terimleri

$$y_n = 0 + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}$$

olarak tanımlanan $(y_n)_n$ dizisinin limitidir. Demek ki,

$$\begin{aligned}
0{,}999\ldots &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}\right)\\
&= \frac{9}{10} \times \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)\\
&= \frac{9}{10} \times \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - 1/10^n}{1 - 1/10}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1 - 1/10} = 1.
\end{aligned}$$

Ve böylece istenen eşitlik kanıtlanmış oldu. Eşitliği kanıtlamak için $0{,}999999\ldots$ ifadesinin tanımını bilmemiz gerektiğini dikkatinize sunarız. □

Şimdi, her pozitif gerçel sayının $a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ türünden bir açılımı olduğunu matematiksel olarak kanıtlayalım.

Teorem 8.7. *$x > 0$ bir gerçel sayı olsun. $x_0 = x$ ve $a_0 = [x_0]$ olsun. Ve $n \geq 1$ için, x_n ve a_n'yi şöyle tanımlayalım: Her $n \geq 0$ için*

$$x_{n+1} = 10(x_n - a_n) \text{ ve } a_{n+1} = [x_{n+1}].$$

O zaman $a_0 \in \mathbb{N}$, her $n \geq 1$ için $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ve

$$x = a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olur.

Kanıt: $a_0 \in \mathbb{N}$ olduğu belli. $n \geq 0$ için,

$$x_{n+1} = 10(x_n - a_n) = 10(x_n - [x_n]) \text{ ve } 0 \leq x_n - [x_n] < 1$$

olduğundan,

$$0 \leq x_{n+1} < 10$$

olur ve buradan da,

$$a_{n+1} = [x_{n+1}] \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

çıkar.

Şimdi kanıtın önemli kısmına geçelim.

$$x = a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

eşitliğini kanıtlayalım. Yani

$$y_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

ise,

$$x = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayalım. Önce, n üzerine tümevarımla,

$$10^n(x - y_n) = x_n - a_n$$

eşitliğini kanıtlayalım. $n = 0$ için, $x - y_0 = x_0 - a_0$ eşitliğini kanıtlamamız gerekir ki, bu da, $x = x_0$ ve $y_0 = a_0$ eşitliklerinden hemen çıkar. Şimdi eşitliği n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} 10^{n+1}(x - y_{n+1}) &= 10^{n+1}\left(x - y_n - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\right) = 10 \cdot 10^n(x - y_n) - a_{n+1} \\ &= 10(x_n - a_n) - a_{n+1} = x_{n+1} - a_{n+1} \end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Şimdi, yukardakini kullanarak, her n için,

$$x - y_n = \frac{10^n(x - y_n)}{10^n} = \frac{x_n - a_n}{10^n} = \frac{x_n - [x_n]}{10^n}$$

buluruz ve bundan da

$$0 \le x - y_n < \frac{1}{10^n}$$

çıkar. Sandviç Teoremi (Teorem 5.1) sayesinde teorem kanıtlanmış olur. $\square$

Eğer $x = a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ ise, $a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ gösterimine x'in ***onluk tabanda açılımı*** denir.

Eğer $x \le 0$ ise ve $-x$'in onluk tabanda açılımı

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

ise,

$$x = -a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

yazarız. Bu da negatif x'in onluk tabanda açılımıdır.

Sonuç 8.8. *Her x gerçel sayısı, bir kesirli sayı dizisinin limitidir. Kesirli sayı dizisinin terimlerini, $a_n \in \{0, 1\ldots, 9\}$ rakamları için (onluk tabanda yazılımıyla),*

$$x_n = [x], a_1a_2\ldots a_n$$

olarak alabiliriz. $\square$

Vize Sınavı

1. $r \in \mathbb{R}$ olsun. A, r'den küçük rasyoneller (kesirli sayılar) ve B, r'den küçük irrasyoneller kümesi olsun.
$$\sup A = \sup B = r$$
eşitliklerini kanıtlayın.
2. Aşağıdaki formülleri n üzerine tümevarımla kanıtlayın:
a. $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$,
b. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
c. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
d. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$
3. $A = \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{N}\}$ olsun. A'nın çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.
4. $B = \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}$ olsun. B'nin çarpma ve bölme altında kapalı olduğunu kanıtlayın.
5. $\mathbb{R}$'nin (ya da $\mathbb{Q}$'nün) çıkarma ve bölme altında kapalı bir altkümesinin toplama ve çarpma altında da kapalı olduğunu kanıtlayın.
6. a. B, 4'üncü alıştırmadaki gibi olsun. $u, v \in \mathbb{Q}^{>0}$ için, ya $uB \cap vB = \emptyset$ ya da $uB = vB$ olduğunu kanıtlayın. b. $\{uB : u \in \mathbb{Q}^{>0}\}$ kümesinin sonsuz olduğunu kanıtlayın.

Limit Alıştırmaları

1. Limitin tanımına giderek $(1/n)_n$ dizisinin 1'e yakınsamadığını gösterin.
2. Genel terimi $(-1)^n/n$ olan dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.
3. Genel terimi $(n+4)/(n^2+1)$ olan dizinin bir zaman sonra azalan olduğunu ve limitinin 0 olduğunu kanıtlayın.
4. Her terimi pozitif olan ve 0'a yakınsayan ama bir zaman sonra hep azalmayan bir dizi bulun.
5. Her terimi pozitif olan ve 0'a yakınsayan bir dizinin artan bir altdizisi olabilir mi?
6. Aşağıdaki dizilerin limitlerini (varsa) bulun.

a. $\dfrac{3n-4}{n+7}$ b. $\dfrac{2n-7}{n^2-10}$ c. $\dfrac{3n^2-4}{n+7}$ d. $\dfrac{2n^2+n}{n^2+1}$ e. $\dfrac{n^3}{2^n}$

f. $\dfrac{\sqrt{2n-7}}{\sqrt{n-10}}$ g. $\dfrac{3^n}{n!}$ h. $\dfrac{n!}{(2n)!}$ i. $\dfrac{n!}{n^n}$ j. $\dfrac{n^4}{n!}$

k. $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$ l. $n^{1/n}$ m. $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

7. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-6n+7}}{3n+5}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n}-n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(2+7\sqrt{n})}{3n+5}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n - 3\cdot 5^{3n}}{2\cdot 5^{n-1}+7\cdot 5^{2n-1}}.$$

8. $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (2a_n+5)/3$ olsun.
   a. Her n için $a_n < 5$ eşitsizliğini gösterin.
   b. Dizinin artan olduğunu gösterin.
   c. Dizinin limitinin olduğunu gösterin.
   d. Dizinin limitinin 5 olduğunu gösterin.
9. Aşağıdaki diziler yakınsak mıdır? Eğer öyleyse limitlerini bulun.

$$\begin{aligned} &a_0 = 2 \text{ ve } a_{n+1} = (5a_n+7)/2;\\ &b_0 = 1 \text{ ve } b_{n+1} = 3 - 1/b_n;\\ &c_0 = 1 \text{ ve } c_{n+1} = 3 - 2/c_n. \end{aligned}$$

10. $a_0 = \sqrt{6}$, $a_{k+1} = \sqrt{6+a_k}$ olsun.
    a. Dizinin ilk dört terimini yazın.
    b. Dizinin artan olduğunu gösterin.
    c. Dizinin üstten 6 tarafından sınırlı olduğunu gösterin.
    d. Dizinin yakınsak olduğunu gösterin.
    e. Dizinin limitinin 3 olduğunu gösterin.
11. $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ olsun. Yani

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots$$

    dizisini ele alalım. Dizinin yakınsak olduğunu ve 2'ye yakınsadığını kanıtlayın.
12. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olsun. Her $n \geq 2$ için,

$$x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$$

    olsun.
    a. Her n için, $1 \leq x_n \leq 2$ eşitsizliklerini gösterin.
    b. Her n için, $|x_n - x_{n+1}| = 1/2^{n-1}$ eşitliğini gösterin.
    c. Her $m > n$ için, $|x_n - x_m| < 1/2^{n-2}$ eşitsizliğini gösterin.
    d. $(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterin.
    e. Her n için, $x_n - x_{n+1} = (-1)^n/2^{n-1}$ eşitliğini gösterin.
    f. Her n için,

$$x_{n+1} - 1 = x_{n+1} - x_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

    eşitliğini gösterin.
    g. $(x_n)_n$ dizisinin limitini bulun (5/3).

13. **[Gauss]** $0 \le a_0 \le b_0$ ve
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ ve } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
olsun.
a. Tümevarımla $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ eşitsizliklerini gösterin.
b. Hem $(a_n)_n$ dizisinin hem de $(b_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını kanıtlayın.
c. Limitlerin eşit olduğunu gösterin. Bu ortak değere a_0 ve b_0 sayılarının ***aritmetik-geometrik ortalaması*** adı verilir.

14. $0 < b_0 < a_0$ ve
$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \text{ ve } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
olsun. Hem $(a_n)_n$ dizisinin hem de $(b_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını ve limitlerin eşitliğini kanıtlayın.

15. a_0, b_0, c_0 verilmiş olsun. $n \ge 1$ için,
$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2},\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
olarak tanımlansın. Dizilerin yakınsaklığını gösterin ve limitlerini hesaplayın. (Önce $a_0 = b_0 = 0$, $c_0 = 1$ alabilirsiniz.)

16. $a_1 = 1$ ve
$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$$
olsun. Bu dizinin limitinin $\sqrt{2}$ olduğunu [N2]'de göstermiştik, Bölüm 9.1'de de göstereceğiz. $(a_{2n})_n$ ve $(a_{2n+1})_n$ altdizilerini ayrı ayrı ele alarak aynı sonucu bir başka yoldan elde edin. Buradan,
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$
eşitliği elde edildiğine dikkatinizi çekeriz.

17. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ olsun. Dizi yakınsak mıdır? Öyleyse limitini bulun.

18. $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $(n^k x^n)_n$ dizisinin yakınsaklığını tartışın.

19. $a_0 = a$, $a_1 = b$ ve her $n \ge 1$ için,
$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{a_{n-1}}$$
olsun. Dizinin yakınsaklığını tartışın.

20. Eğer sabit bir $c \in (0, 1)$ sayısı için,
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le c|x_{n+1} - x_n|$$
her n için sağlanıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzen dizi*** denir. (Bkz. Altbölüm 9.1.) Büzen bir dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

21. Yazı tura atılıyor. Yazı geldiğinde 1 puan, tura geldiğinde 2 puan alınıyor. $p(n)$, n sayısına ulaşma olasılığı olsun. $p(n)$ dizisinin limitinin $2/3$ olduğunu kanıtlayın. Puanlar değişseydi sonuç ne olurdu?

22. Yukardaki soru gene, ama bu sefer zar atılıyor ve gelen zar kadar puan kazanılıyor.

23. **[Fibonacci Dizisi]** $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve her $n \geq 0$ için,

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

olsun. Bu diziye ***Fibonacci dizisi*** adı verilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

eşitliğini kanıtlayın. Sağdaki sayı altın oran olarak bilinen sayıdır.

24. $(a_n)_n$ sınırlı bir dizi olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak her altdizisinin limitinin aynı sayı olduğunu varsayalım. Dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

25. $(a_n)_n$ sınırlı bir dizi ve $S = \{x \in \mathbb{R} :$ sonsuz sayıda n için $x < a_n\}$ olsun. $(a_n)_n$'nin $\sup S$'ye yakınsayan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. Bundan Bolzano-Weierstrass Teoremi'ni kanıtlayın: Sınırlı bir dizinin yakınsak bir altdizisi vardır. (Bkz. Teorem 9.4.)

26. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ limitini hesaplayın. İpucu: İfadenin eşleniğiyle çarpıp eşleniğine bölün.

27. $(q_n)_n$, limiti 0 olan pozitif bir kesirli sayı dizisi olsun. Her $a > 0$ için $\lim a^{q_n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın.