Math 114 Final Sınavı (Kümeler Kuramı)
Ali Nesin
2008

X bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere (X, d) ikilisine **metrik uzay** denir eğer $x, y, z \in X$,

M1. $d(x, y) \geq 0$,
M2. $d(x, y) = 0$ if and only if $x = y$,
M3. $d(x, y) = d(y, x)$,
M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(X, d) bir metrik uzay olsun.

1. Her $x, y, z \in X$ için $|d(x, z)| \geq |d(x, y) - d(y, z)|$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterin. (3 puan.)

Her $a \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, X' in $B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$ altkümesine a **merkezli,** r **yarıçaplı açık yuvar** denir. Açık yuvarların bileşimine **açık küme** denir.

2. X'in bir U altkümesinin açık olması için, her $a \in U$ için $a \in B \subseteq U$ içindeliklerini sağlayan bir B açık topunun olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın. (2 puan.)

3. X'in bir U altkümesinin açık olması için, her $a \in U$ için $B(a, r) \subseteq U$ ilişkisini sağlayan pozitif bir r gerçel sayısı olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın. (4 puan.)

4. Her $a \in X$ için, eşitliğini kanıtlayın. (3 puan.)

5. Her $a \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, X'in $\underline{B}(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ altkümesine **kapalı top** denir.

5a. Kapalı topların tümleyenlerinin açık küme olduğunu gösterin. (3 puan.)
5b. Her $a \in X$ için, eşitliğini kanıtlayın. (3 puan.)
5c. $K \subseteq X$ ve $a \notin K$ olsun. Her $n = 1, 2, ...$ için $U_n = \underline{B}(a, 1/n)^c$ tanımını yapalım. $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ içindeliğini kanıtlayın. (3 puan.)

6. Aşağıdakileri gösteriniz.
6a. $\emptyset$ ve X açık kümelerdir. (2 puan.)
6b. Açık kümelerin birleşimi açıktır. (2 puan.)
6c. Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi açıktır. (4 puan.)

7. $x, y \in X$ iki farklı noktaysa, $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümelerinin var olduğunu gösterin. (3 puan.)

8. $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $(\mathbb{R}, d)$ ikilisinin bir metrik uzay olduğunu göstermek basit. $\mathbb{R}$ üzerindeki bu metriğe ***Öklid metriği*** ya da ***standart metrik*** denir. $\mathbb{R}$'den bir metrik uzay olarak bahsedildiğinde üzerinde bu metriği varsayacağız.

8a. $\mathbb{R}$' nin (0, 1] aralığının açık olmadığını gösterin. (3 puan.)

8b. $[0, 1]^c$ kümesinin açık olduğunu gösterin. (2 puan.)

U kümesi $\mathbb{R}$'nin açık bir altkümesi olsun. $x, y \in U$ için, $x \equiv y \Leftrightarrow [x, y] \cup [y, x] \subseteq U$ tanımını yapalım.

8c. $\equiv$ ikili ilişkisinin U üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin. (3 puan.)

8d. Her denklik sınıfının bir açık aralık olduğunu gösterin. (7 puan.)

8e. U'nun ayrık açık aralıkların birleşimi olduğu sonucuna varın. (1 puan.)

8f. U'nun sayılabilir sonsuzlukta ayrık açık aralıkların birleşimi olduğu sonucuna varın. (7 puan.)

9. B kümesi X metrik uzayının bir altkümesi olmak üzere, $B \subseteq B(a, r)$ ilişkisini sağlayan bir $a \in A$ ve $r \in \mathbb{R}$ varsa B'ye X'in **sınırlı** altkümesi denir. B'nin sınırlı olmasının seçilen a'dan bağımsız olduğunu kanıtlayın. (5 puan.)

10. K kümesi X metrik uzayının bir altkümesi olsun

X'in açık altkümelerinin ailesi $(U_i)_{i\in I}$ eğer $K \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ ilişkisini sağlıyorsa, $(U_i)_{i\in I}$ ailesine K' nın **açık örtüsü** denir. $J \subseteq I$ ve $K \subseteq \cup_{i\in J} U_i$ ise $(U_i)_{i\in J}$ ailesine $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün **alt örtüsü** denir. Eğer K' nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa K' ya X' in **tıkız** alt kümesi denir .

10a. Her sonlu kümenin tıkız olduğunu gösterin. (2 puan.)

10b. Sonlu sayıda tıkız kümenin birleşiminin tıkız olduğunu gösterin. (3 puan.)

10c. Metrik uzayların tıkız altkümelerinin sınırlı olduğunu gösterin. (7. soruya bakın). (5 puan.)

11e. $[a, b]$ kapalı aralığının $\mathbb{R}$' de tıkız olduğunu gösterin (Öklid metriğiyle). (20 puan.)