19. Birkaç Önemli Yakınsaklık Kıstası Daha

19.1 Riemann Serisi ve Kıstası

Geçmişte birçok seriyi geometrik seriyle, yani

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

serisiyle karşılaştırmıştık. Bize çok yardımcı olan bu seriyi "dost seri" ya da "yardımcı seri" olarak algılayabiliriz. Seriler konusunda bu nitelemeyi hakeden bir başka tür seri daha vardır. ***p-serileri*** ya da ***Riemann serileri***, yani bir p için,

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

türünden yazılan serilerdir bunlar. $\zeta(p)$ yazılımı klasiktir. Adına ***Riemann zeta fonksiyonu*** denir. (Ama neden fonksiyon dendiği ve fonksiyonsa tanım kümesinin ne olduğu şimdilik bir muamma olmalı.) Matematiğin ve sayılar kuramının en önemli ve en muamma fonksiyonlarından biridir. Asal sayıların dağılımıyla yakın ilişkisi vardır.

Eğer $p = 2$ ise bu serilerin yakınsaklığını geçmişte birçok kez kanıtlamıştık. Dolayısıyla $p > 2$ ise de bu serinin yakınsaklığını biliyoruz. Öte yandan $p < 2$ ise bu serinin yakınsaklığı hakkında şimdilik bir şey bilmiyoruz.

Teorem 19.1. *p kesirli bir sayı olsun. O zaman,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

serisi $p > 1$ ise yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır[1]*.*

[1] Bu teorem $p \in \mathbb{R}$ ise de geçerlidir. Teorem 19.1 ışığında, $p \in \mathbb{R}$ iken i^p'nin tanımı verildiğinde bunun kanıtı çok kolay olacak.

Birinci Kanıt: Eğer $p \le 1$ ise, $1/n^p \ge 1/n$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = \infty$$

olur. Bundan böyle $p > 1$ olsun.

Kısmi toplamların

$$1 + \frac{1}{p-1}$$

sayısı tarafından üstten sınırlandığını kanıtlayacağız, böylece serinin yakınsaklığı kanıtlanmış olacak. Demek ki bir sonraki savı kanıtlamak yeterli.

Sav. *Eğer $p > 1$ bir kesirli sayıysa her $n \ge 2$ için,*

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^p} \le \frac{1-n^{1-p}}{p-1}$$

olur.

Sav'ın Kanıtı: $n = 2$ için, eşitsizlik,

$$\frac{1}{2^p} \le \frac{1-2^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğine dönüşür. Yani, $p+1 \le 2^p$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Önsav 3.18'de $x = 1$ alırsak, savımız $n = 2$ için kanıtlanmış olur. Şimdi $n \ge 2$ için,

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^p} \le \frac{1-n^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğini varsayıp,

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^p} \le \frac{1-(n+1)^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Böylece savımız tümevarımla kanıtlanmış olacak. Tümevarım varsayımına göre,

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^p} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^p} + \frac{1}{(n+1)^p} \le \frac{1-n^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{(n+1)^p}$$

olduğundan,

$$\frac{1-n^{1-p}}{p-1}+\frac{1}{(n+1)^p}\le\frac{1-(n+1)^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu son ifadeyle biraz oynayalım. Önce

$$\frac{1}{(n+1)^p}\le\frac{n^{1-p}-(n+1)^{1-p}}{p-1},$$

sonra paydaları eşitleyerek,

$$p-1\le(n+1)^p n^{1-p}-(n+1)=(n+1)^p nn^{-p}-n-1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p n-n-1$$

elde ederiz, yani

$$1+\frac{p}{n}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Ama Önsav 3.18'de $x=1/n$ alınırsa bunun doğru olduğu görülür. Sav'la birlikte teorem de kanıtlanmıştır. □

Teorem ve Kanıtı Üzerine. Tahmin edileceği üzere, kanıtladığımız teorem sadece kesirli p sayıları için değil, gerçel p sayıları için de geçerlidir. Bunu bir gerçel sayıyla üs almayı öğrendiğimizde göreceğiz.

Bu teorem, integral kıstası denen bir kıstasla çok daha kolay biçimde, birkaç satırda kanıtlanır. Kitaplarda da genellikle integral testini kullanan kanıtlar bulunur. (Üçüncü ciltte bu testi göreceğiz.) Aslında verdiğimiz kanıtta yaptığımız, integral kıstasını kullanarak, teoremi kanıtlamak için Sav'daki eşitsizliği kanıtlamamız gerektiğini anlayıp, o eşitsizliği elementer yöntemlerle kanıtlamaktan ibarettir; yoksa Sav'daki eşitsizliği tahmin etmek ortalama bir ölümlüye nasip olmaz. Yani her ne kadar integral kıstasını kanıtımızda açık açık kullanmamışsak da, bu kıstası üstü kapalı bir biçimde kullandık.

Aşağıda aynı teoremin iki değişik kanıtını daha vereceğiz.

Teorem 19.1'in Çok Daha Makul İkinci Kanıtı:

$$S_n=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i^p}$$

olsun. O zaman her $k\ge 1$ için,

$$S_{2^k}-S_{2^{k-1}}=\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p}+\frac{1}{(2^{k-1}+2)^p}+\cdots+\frac{1}{2^{kp}}$$

olur. Sağ tarafta tam 2^{k-1} tane terim var ve her biri $1/2^{(k-1)p}$ sayısından küçük. Demek ki,

$$S_{2^k}-S_{2^{k-1}}\le 2^{k-1}\times\frac{1}{2^{(k-1)p}}=\frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}}.$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= (S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) + (S_{2^{k-1}} - S_{2^{k-2}}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 \\ &< \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}} + \frac{1}{2^{(k-2)(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} + 1 + 1 < \frac{1}{1 - 1/2^{p-1}} + 1 \end{aligned}$$

olur ve böylece S_{2^k} toplamlarının sınırlı olduğu anlaşılır. Bundan, artan bir dizi olan $(S_n)_n$'nin de sınırlı olduğu çıkar. Dolayısıyla dizinin limiti vardır. □

Örnekler

19.1. Uygulama olarak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{i+1}}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Bu seriyi, teorem sayesinde yakınsak olduğunu bildiğimiz,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}}$$

dizisiyle karşılaştıracağız. Birinin i'inci terimini diğerinin i'inci terimine bölüp limiti alalım:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\frac{1}{i\sqrt{i+1}}}{\frac{1}{i^{3/2}}} = \lim_{i\to\infty} \frac{i^{3/2}}{i\sqrt{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{i^{1/2}}{\sqrt{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \sqrt{\frac{i}{i+1}} = 1 \neq 0, \infty.$$

(En sondaki limitin 1 olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.) Teorem 15.6'ya göre,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{i+1}}$$

serisi yakınsaktır.

19.2. $\sum \frac{1}{\sqrt{i(i^2-1)}}$ serisi yakınsaktır çünkü

$$\frac{1}{\sqrt{i(i^2-1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{i(i^2-i^2/2)}} \leq \frac{\sqrt{2}}{i^{3/2}}$$

olur ve teoreme göre sağdaki terimlerin serisi yakınsaktır.

19.3. $\sum \frac{1}{i^{3/2}}$ serisiyle karşılaştırarak, $\sum \frac{i}{i^3+1}$ serisinin yakınsak olduğunu görürüz.

19.4. $p \in \mathbb{Q}$ olsun. $\sum \frac{1}{(2i+1)^p}$ dizisi $p > 1$ iken yakınsak, aksi halde ıraksaktır. Çünkü $p > 1$ ise

$$\frac{1}{(2i+1)^p} < \frac{1}{(2i)^p} < \frac{1}{2^p}\frac{1}{i^p}$$

olur ve $p \leq 1$ için

$$\frac{1}{(2i+1)^p} \leq \frac{1}{(3i)^p} < \frac{1}{3^p}\frac{1}{i^p}$$

olur.

19.5. Eğer n bir kare değilse $a_n = 1/n^2$ olsun, eğer n bir kareyse, $a_n = 1/n^{2/3}$ olsun. O zaman $\sum a_i$ yakınsar çünkü,

$$\sum a_i = \sum_{i \text{ kare değil}} \frac{1}{i^2} + \sum_{i \text{ kare}} \frac{1}{i^{2/3}} = \sum_{i \text{ kare değil}} 1/i^2 + \sum \frac{1}{i^{4/3}} \leq \sum \frac{1}{i^2} + \sum \frac{1}{i^{4/3}}$$

olur ve en sağdaki toplamı alınan iki seri yakınsaktır.

Şimdi bu teoremin iki sonucunu yazalım. Sonuçların uygulamalarını daha sonra göreceğiz.

Sonuç 19.2 (Riemann Kıstası). *$\sum x_n$ pozitif bir seri olsun.*
i. *Eğer bir $s > 1$ için $\lim_{n\to\infty} n^s x_n = 0$ ise seri yakınsar.*
ii. *Eğer bir $s < 1$ için $\lim_{n\to\infty} n^s x_n = \infty$ ise seri ıraksar.*

Kanıt: $y_n = 1/n^s$ olsun.
i. Teoreme göre $\sum y_n$ yakınsaktır. Ve varsayıma göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

olur. Sonuç 15.5'e göre $\sum x_n$ yakınsar.
ii. Teoreme göre $\sum y_n$ ıraksaktır ve varsayıma göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$$

olur. Sonuç 15.5'e göre $\sum x_n$ ıraksar. □

Sonuç 19.3. *$\sum x_n$ pozitif bir seri olsun.*

$$z_n(s) = \frac{x_{n+1}}{x_n} - \left(\frac{n}{1+n}\right)^s$$

olsun.
i. *Eğer her $n > N$ için, $z_n(s)$'nin negatif olduğu bir $s > 1$ ve N varsa, o zaman $\sum x_n$ serisi yakınsaktır.*
ii. *Eğer her $n > N$ için, $z_n(s)$'nin negatif olduğu bir $s \le 1$ ve N varsa, o zaman $\sum x_n$ serisi ıraksaktır.*

Kanıt: Bu sonuç, yukardaki teoremin ve Oran Kıyaslama Teoremi'nin (bkz. Sonuç 15.6) doğrudan bir sonucudur. □

Alıştırmalar

19.6. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını tartışın.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{i\sqrt{i+1}},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2+i+1}{i^3},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3+i+1}{i^2},\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2+(-1)^i i+1}{i^3-i+1},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{i^2(i+1)},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{i(i+1)},\ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^i i^2}.$$

19.7. Eğer $s > 1$ ise $(s-1)\zeta(s) < s$ eşitsizliğini gösterin. $1 \le (s-1)\zeta(s)$ eşitsizliği de doğrudur. Bunları kullanarak, eğer $s_n > 1$ ise ve $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ ise $\lim_{n\to\infty}(s_n - 1)\zeta(s_n) = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

19.8. $p \in \mathbb{Q}$ olsun.

$$\sum_{i>1} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

serisi hangi p kesirli sayıları için yakınsaktır?

Yukardaki alıştırmalarda verdiğimiz örneklerin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı d'Alembert ya da Cauchy kıstaslarıyla anlaşılamaz; illa Riemann Kıstası'nı kullanmak gerekir. Cauchy ve Riemann kıstasları $\sum r^n$ geometrik serisini nirengi serisi olarak kabul ettiğinden, bu kıstasların işe yaradığı seriler oldukça çabuk yakınsarlar ya da ıraksarlar. Öte yandan Riemann Kıstası $\sum_{n \geq 1} 1/n^p$ serisini nirengi serisi olarak kabul eder ve p sayısı 1'e yakın olduğunda bu seriler çok zor (yani çok yavaş) yakınsarlar ya da ıraksarlar. Yani Riemann Kıstası unutulmaması gereken oldukça güçlü bir kıstastır.

Örnekler

19.9.

$$\alpha(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^p} \textbf{ Serisi}$$

Eğer $p > 1$ ise, serinin mutlak yakınsadığı, eğer $p \leq 1$ ise serinin mutlak yakınsamadığı bu bölümde kanıtlanan teoremden belli. Eğer $p \leq 0$ ise, serinin ıraksadığı genel terimin 0'a yakınsamamasından anlaşılıyor. Eğer $0 < p \leq 1$ ise serinin koşullu yakınsadığı (yani yakınsadığı ama mutlak yakınsamadığı), Bölüm 17'de kanıtladığımız Leibniz Testi'nden belli. Sonuç olarak seri,

$$(-\infty, 0],\ (0, 1] \text{ ve } (1, \infty)$$

aralıklarında değişik davranışlar sergiliyor, sırasıyla ıraksıyor, koşullu yakınsıyor ve mutlak yakınsıyor. Anımsarsanız kuvvet serilerinde durum hiç bu kadar çetrefilli değildi. (Bkz. Teorem 18.6.)

19.10. *$0 < q < p$ kesirli sayılar olsun.*

$$\sum_{n>2} \frac{1}{n^p - n^q}$$

serisi yakınsak mıdır?

Yanıt: Sonuç 19.2 bize sonucu verir: Eğer $p > 1$ ise seri yakınsar çünkü eğer s kesirli sayısı $p > s \geq 1$ ve $s > q$ eşitsizliklerini sağlarsa,

$$n^s \frac{1}{n^p - n^q} = \frac{1}{n^{p-s} - 1/n^{s-q}} \longrightarrow 0$$

olur. Eğer $p < 1$ ise seri ıraksar çünkü eğer $s = 1$ ise

$$n^s \frac{1}{n^p - n^q} = \frac{n}{n^p - n^q} = \frac{n^{1-p}}{1 - 1/n^{p-q}} \longrightarrow \infty$$

olur.

19.11. *$p \in \mathbb{Q}$ olsun.*

$$\sum_{i>1} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

serisi hangi p kesirli sayıları için yakınsaktır?

Yanıt:

$$\begin{aligned}
n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= n^p\,\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = n^p\,\frac{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\\
&= \frac{\frac{n^p}{n(n-1)}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{n^p}{n(n-1)}\,\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \simeq \frac{n^p}{n^2}\,\frac{n}{2\sqrt{n}}\\
&\simeq n^{p-2+1-1/2} = n^{p-3/2}
\end{aligned}$$

karşılaştırmasından dolayı, eğer $p \leq 5/2$ ise seri ıraksar, aksi halde yakınsar. □

Teorem 19.1'in Üçüncü Kanıtı: Üçüncü kanıt daha genel bir teoremden kaynaklanır:

Teorem 19.4 (Cauchy)**.** *$(a_n)_n$, azalan ve terimleri 0'dan büyük bir dizi olsun. $\sum_{n\geq 1} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_{2^i} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

Kanıt: Kısmi toplamların sınırlı olduklarını göstermek yeterli.

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\\
t_n &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n},
\end{aligned}$$

olsun. Eğer $n < 2^k$ ise $s_n \leq t_{k-1}$ olur çünkü

$$\begin{aligned}
s_n \leq s_{2^k-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^{k-1}})\\
&\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^{k-1}} = t_{k-1}.
\end{aligned}$$

Demek ki $(t_k)_k$ dizisinin limiti varsa $(s_n)_n$ dizisi üstten sınırlıdır ve limiti vardır. Öte yandan eğer $n > 2^k$ ise $s_n \geq t_k/2$ olur çünkü

$$\begin{aligned}
s_n \geq s_{2^k} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})\\
&\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{t_k}{2}.
\end{aligned}$$

Demek ki $(s_n)_n$ dizisinin limiti varsa $(t_k)_k$ dizisi üstten sınırlıdır ve limiti vardır. □

Teorem 19.1 bundan kolaylıkla çıkar: $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^p$ serisinin yakınsak olması için yeter ve gerek koşul,

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{(2^i)^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^i$$

serisinin yakınsak olmasıdır, ki bu geometrik serinin ancak $p > 1$ için yakınsak olduğunu biliyoruz. □

Teorem 19.4 daha genel bir teorem vardır. Yeri gelmişken o teoremi de belirtelim:

Teorem 19.5 (Cauchy Yoğunlaşma Teoremi)**.** *$(x_n)_n$ pozitive ve azalan bir dizi olsun. $(k_n)_n$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olsun. Öyle bir $M > 0$ sayısının olduğunu varsayalım ki, her $0 < n \in \mathbb{N}$ için*

$$k_{n+1} - k_n \leq M(k_n - k_{n-1}).$$

olsun. Bu durumda

$$\sum x_n \text{ ile } \sum (k_{i+1} - k_i) x_{k_i}$$

serilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır.

Kanıt: Serilerin kısmi toplamlarına sırasıyla s_n ve t_n diyelim. $n < k_m$ için,

$$A = x_0 + \cdots + x_{k_0 - 1}$$

tanımıyla,

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{k_m} &\leq A + (x_{k_0} + \cdots + x_{k_1 - 1}) + \cdots + (x_{k_m} + \cdots + x_{k_{m+1}-1}) \\ &\leq A + (k_1 - k_0) x_{k_0} + \cdots + (k_{m+1} - k_m) x_{k_m} \\ &= A + t_m \end{aligned}$$

olur. Bu da $(t_m)_m$ dizisi sınırlıysa $(s_n)_n$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

Öte yandan eğer $n > k_m$ ise,

$$\begin{aligned} s_n &\geq s_{k_m} \geq (x_{k_0+1} + \cdots + x_{k_1}) + \cdots + (x_{k_{m-1}+1} + \cdots + a_{k_m}) \\ &\geq (k_1 - k_0) a_{k_1} + \cdots + (k_m - k_{m-1}) a_{k_m} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$M s_n \geq (k_2 - k_1) a_{k_1} + \cdots + (k_{m+1} - k_m) a_{k_m} = t_m - t_0$$

olur. Bu da $(s_n)_n$ dizisi sınırlıysa $(t_m)_m$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. □

19.2 Raabe Kıstasları

Teorem 18.1'de duyurulan ve kanıtlanan d'Alembert Kıstası'nı anımsayalım. Aynen şöyle söylüyordu o kıstas:

d'Alembert Yakınsaklık Kıstası. *Eğer*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}$$

limiti varsa ve 1'den küçükse, o zaman $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır. Eğer limit varsa ve 1'den büyükse ya da sonsuzsa o zaman seri ıraksaktır. □

Limit 1 olduğunda d'Alembert Kıstası bize serinin yakınsaklığı hakkında herhangi bir bilgi vermiyor. Örneğin,

$$\sum \frac{(2i)!}{4^i(i+1)!i!}$$

serisine d'Alembert Kıstası uygulamaya çalışalım (terimleri faktoriyel barındıran serilere genellikle d'Alembert Kıstası uygulanmaya çalışılır):

$$\frac{\frac{(2i+2)!}{4^{i+1}(i+2)!(i+1)!}}{\frac{(2i)!}{4^i(i+1)!i!}} = \frac{(2i+2)(2i+1)}{4(i+2)(i+1)} \to 1.$$

Görüldüğü gibi limit 1 çıktı ve d'Alembert Kıstası bize yakınsaklık konusunda bir ipucu vermedi. d'Alembert Yakınsaklık Kıstası'nın bize yakınsaklık hakkında bir ipucu vermediği bir başka seri,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

serisidir. Ama neyse ki bu serinin limiti olduğunu biliyoruz.

Bu altbölümde, limit 1 olduğunda başvurulabilecek bir başka kıstas kanıtlayacağız, Raabe Kıstası. Bu kıstas sayesinde yukardaki serinin yakınsak olup olmadığını anlayabileceğiz.

Bir an için, $\sum x_i$ pozitif serisinin terimlerinin,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = 1$$

eşitliğini sağladığını varsayalım. Ve α_i terimlerini,

$$\alpha_i = 1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

olarak tanımlayalım. $(\alpha_i)_i$ dizisi elbette 0'a yakınsar ama dizinin 0'a nasıl yakınsadığı önemli. $(\alpha_i)_i$ dizisinin $(1/i)_i$ dizisiyle karşılaştırılması bize $\sum x_i$ serisinin yakınsaklığı konusunda ipucu verebilir. Teorem şöyle:

Teorem 19.6 (Raabe Kıstası). *Eğer*

$$\lim_{i\to\infty} i\left(1 - \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}\right)$$

limiti varsa ve 1*'den büyükse o zaman* $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır. Öte yandan limit* 1*'den küçükse seri ıraksaktır.*

Limit 1 olduğunda Raabe Kıstası da serinin yakınsaklığı konusunda bir fikir beyan etmekten aciz. Seriler konusunda güçlüklerden ilelebet kurtulmanın yolu yoktur. Doktor ancak ağrı kesici verebiliyor...

Teorem 19.6'nın Birinci Kısmının Kanıtı: Her zaman olduğu gibi x_i yerine $|x_i|$ alarak serinin pozitif olduğunu varsayabiliriz ve böylece mutlak değerlerden kurtuluruz. Limite ℓ diyelim. $\epsilon > 0$ sayısı, $\ell - \epsilon > 1$ eşitliğini sağlayacak kadar küçük olsun. Varsayımdan dolayı öyle bir N vardır ki, her $i > N$ için,

$$1 < \ell - \epsilon < i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) < \ell + \epsilon$$

olur. Bizim için önemli olan ilk iki eşitsizlik olacak. $\ell - \epsilon$ yerine p diyelim. Demek ki yeterince büyük i için,

$$1 < p < i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right)$$

olur, yani öyle bir $p > 1$ vardır ki, yeterince büyük i göstergeçleri için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i}$$

olur. Aslında Raabe Kıstası'nı kanıtlamak için sadece bu eşitsizliğe ihtiyacımız olacak, teoremin önermesindeki limitin varlığı ya da yokluğu umurumuzda olmayacak. Dolayısıyla limitten kurtulup çok daha genel bir teorem kanıtlayabiliriz:

Teorem 19.7 (Raabe Kıstası II). *Eğer $x_i > 0$ ise ve yeterince büyük i göstergeçleri için*

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı i'den bağımsız bir $p > 1$ sayısı varsa, o zaman $\sum x_i$ serisi yakınsaktır.

Kanıt: Teoremi kanıtlamak için Teorem 19.1'de kullanılan Önsav 3.18'in bir benzerine ihtiyacımız var.

Sav 1. *Her $p \geq 1$ ve $0 < x < 1$ gerçel sayıları için $1 - px \leq (1-x)^p$ eşitsizliği geçerlidir.*

Bu savı bu notlarda buraya kadar verilen bilgilerle kanıtlamamıza imkân yok, çünkü henüz bir p gerçel sayısı için $1 - x$ gibi bir sayının p'inci gücünü almayı henüz tanımlamadık. Bir sayının p'inci gücünü sadece kesirli p sayıları için biliyoruz. Ama ne gam! Eğer teoremin varsayımı gerçel bir p sayısı için geçerliyse, o zaman aynı varsayım kesirli bir p sayısı için de geçerlidir. Nitekim, eğer q kesirli sayısı, $1 < q < p$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, yeterince büyük i göstergeci için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i} \leq 1 - \frac{q}{i}$$

olur. Demek ki bundan böyle teoremdeki p'nin kesirli olduğunu varsayabiliriz ve yukardaki sav yerine aşağıdaki savı kanıtlamakla yetinebiliriz:

Sav 2. *Her $p \geq 1$ kesirli sayısı ve $0 < x < 1$ gerçel sayısı için*

$$1 - px \leq (1-x)^p$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ama bu aynen Önsav 3.22.

Teorem 19.6'nın Birinci Kısmının Kanıtının Devamı: Sav'a göre, yeterince büyük i göstergeçleri için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i} \leq \left(1 - \frac{1}{i}\right)^p = \frac{(i-1)^p}{i^p} = \frac{1/i^p}{1/(i-1)^p}$$

eşitsizliği doğrudur. Sonuç bundan ve Oran Kıyaslama Teoremi'nden (bkz. Sonuç 15.6) çıkar. Nitekim $\sum x_i$ serisini, yakınsak olduğunu Teorem 19.1'den bildiğimiz $\sum_{i=1}^{\infty} i^{1/p}$ serisiyle kıyaslayabiliriz. □

Teoremin ikinci kısmının kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Raabe kıstasının bir başka kanıtı ve farklı ve daha genel bir önerme için bkz Önsav 19.10.

Sonuç 19.8. *Eğer yeterince büyük i göstergeçleri için $|x_{i+1}/x_i| \leq 1 - p/i$ eşitsizliklerinin sağlandığı i'den bağımsız bir $p > 1$ sayısı varsa, o zaman $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ olur.* □

Örnekler

19.12. *Bu kıstası uygulayarak,*

$$\sum \frac{(2i)!}{4^i (i+1)!\, i!}$$

serisinin yakınsaklığını kanıtlayabiliriz.

Kanıt: Eğer x_i bu serinin i'inci terimiyse,

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1 - \frac{(2i+2)(2i+1)}{4(i+2)(i+1)}\right) = \frac{i(6i+6)}{4(i+2)(i+1)} \to \frac{3}{2} > 1$$

olur. Demek ki seri yakınsaktır. Bu serinin,

$$\frac{1}{4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{4\cdot 6\cdots(2i+2)} + \cdots$$

serisi olduğuna dikkatinizi çekeriz. Buradan da genel terimin 0'a yakınsadığını, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n+1)!\, n!} = 0$$

eşitliğini buluruz. Hesapta olmayan başlı başına ilginç bir eşitlik. □

19.13. Raabe Kıstası'nı $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ serisine uygularsak serinin yakınsak olduğunu (bir kez daha) görürüz, nitekim,

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1 - \frac{i^2}{(i+1)^2}\right) = \frac{i(2i+1)}{(i+1)^2} \to 2 > 1$$

bulunur.

19.14.

$$\sum_i \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3i+1)}{(i+1)!3^i}$$

serisi yakınsak mıdır?

Kanıt: d'Alembert kıstasının bir sonuç vermeyeceği hemen anlaşılır, çünkü eğer x_i yukardaki serinin i'inci terimiyse, o zaman,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{3i+4}{3i+6}$$

olur ve bu ifadenin limiti 1'dir. Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım:

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1 - \frac{3i+4}{3i+6}\right) = i\left(\frac{2}{3i+6}\right)$$

ve bu dizi 1'den küçük olan 2/3'e yakınsar. Raabe kıstasına göre seri ıraksar. □

19.15. a ve b iki sayı olsun. Şu seriye bakalım:

$$1 + \frac{1+a}{1+b} + \frac{(1+a)(2+a)}{(1+b)(2+b)} + \frac{(1+a)(2+a)(3+a)}{(1+b)(2+b)(3+b)} + \cdots$$

Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım (mutlak değerleri atarak!):

$$i\left(1 - \frac{(1+a)(2+a)\dots(i+1+a)}{(1+b)(2+b)\dots(i+1+b)}\,\frac{(1+b)(2+b)\dots(i+b)}{(1+a)(2+a)\dots(i+a)}\right) = i\left(1 - \frac{i+1+a}{i+1+b}\right)$$

$$= \frac{b-a}{1+1/i+a/i} \longrightarrow b-a$$

olduğundan, $b > a+1$ ise seri mutlak yakınsar, $b < a+1$ ise seri ıraksar.
Eğer $b = a+1$ ise Raabe kıstası bize bir şey söylemiyor ama bu durumda serinin genel terimi

$$\frac{(1+a)(2+a)\cdots(i+a)}{(2+a)(3+a)\cdots(i+1+a)} = \frac{1+a}{i+1+a}$$

olduğundan, seriyi $\sum 1/i$ serisiyle kıyaslayarak, serinin ıraksak olduğunu anlarız.

19.16. a, b, c, d gerçel sayılar olsun. Şu seriye bakalım:

$$\sum \frac{a(a+c)(a+2c)\cdots(a+ic)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+id)}$$

Eğer $c = d = 0$ ve $b = 1$ alırsak, $\sum a^{i+1}$ geometrik serisini elde ederiz. Dolayısıyla, serimiz genelleştirilmiş bir geometrik seri olarak addedilebilir.
Eğer $a = 1$, $b = 4$, $c = d = 2$ alırsak, Örnek 19.12'u elde ederiz.
Eğer $a = b = 1$ ise Örnek 19.15'yi elde ederiz.
Bu serinin hangi a, b, c, d sayıları için yakınsak olduğunu anlamaya çalışalım. Seriye d'Alembert Kıstası'nı uygulamaya kalkışalım:

$$\frac{|a+(i+1)c|}{|b+(i+1)d|} \to \frac{|c|}{|d|}$$

Eğer $|c| < |d|$ ise seri yakınsar, eğer $|d| < |c|$ ise seri ıraksar. Ama eğer $|c| = |d|$ ise serinin yakınsayıp yakınsamadığını anlayamayız. $d = c > 0$ durumunda Raabe Kıstası'nı uygulamaya çalışalım. Nitekim yukardaki örnekte olan da bu: $d = c = 2 > 0$.

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right)$$

ifadesinin i sonsuza giderken limitini alalım:

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1 - \frac{a+(i+1)c}{b+(i+1)c}\right) = i\frac{b-a}{b+(i+1)c} \to \frac{b-a}{c}.$$

Demek ki, eğer $c > 0$ ise,

$$\sum \frac{a(a+c)(a+2c)\cdots(a+ic)}{b(b+c)(b+2c)\cdots(b+ic)}$$

serisi $b > a+c$ ise mutlak yakınsar, $b < a+c$ ise ıraksar. Eğer $b = a+c$ ise bu yöntem bize serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı hakkında bir şey söylemez; ama $\sum 1/i$ serisiyle kıyaslayarak bu durumda serinin ıraksak olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

19.17. **[Hipergeometrik Seri]** a, b, c üç sayı olsun. Şu seriye bakalım:

$$1 + \frac{a}{1}\frac{b}{c}x + \frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

d'Alembert kıstasını kullanmaya çalışalım. u_i, x^i'nin katsayısı olsun.

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{(a+i+1)(b+i+1)}{(i+2)(c+i+1)}$$

olduğundan, yeterince büyük i için bu oranlar pozitif olacak ve d'Alembert (ya da Raabe) kıstasını uygulamak için mutlak değerlere ihtiyaç yok. d'Alembert kıstası uygulandığında, serinin $|x| < 1$ için mutlak yakınsak olduğu, $|x| > 1$ için ıraksak olduğu kolaylıkla çıkar. Bundan böyle $x = 1$ olsun. Bu durumda Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım. $j = i+1$ tanımını yaparak,

$$\begin{aligned} i\left(1 - \frac{u_{i+1}}{u_i}\right) &= i\left(1 - \frac{(a+i+1)(b+i+1)}{(i+2)(c+i+1)}\right) = i\left(1 - \frac{(a+j)(b+j)}{(j+1)(c+j)}\right) \\ &= i\frac{j(c-a-b+1) - ab - c}{(j+1)(c+j)} = i\frac{(c-a-b+1) - ab/j - c/j}{(j+1)(c/j+1)} \\ &= \frac{(c-a-b+1) - ab/j - c/j}{(c/j+1)(j+1)/i} \longrightarrow c-a-b+1 \end{aligned}$$

buluruz. Demek ki $c > a+b$ ise seri yakınsar, $c < a+b$ ise seri ıraksar. $c = a+b$ durumunda da seri yakınsar. Bunun için bkz. [Bro, sayfa 40-41].

19.3 Kummer-Dini Kıstası

Bu altbölümde, d'Alembert ve Raabe kıstaslarından daha genel (bkz. Örnek 19.20 ve Sonuç 19.10) bir kıstas göreceğiz[2]. İlk olarak Kummer tarafından bulunan bu türden bir kıstas, daha sonra Dini tarafından aşağıda açıklanan biçimiyle kanıtlanmıştır.

[2] Bu bölüm için [Bro]'dan yararlanılmıştır.

Teorem 19.9. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki kesin pozitif dizi ve*

$$c_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$$

olsun.
i. *Eğer* $\liminf c_n > 0$ *ise* $\sum a_i$ *yakınsaktır.*
ii. *Eğer* $\sum \frac{1}{b_i} = \infty$ *ve* $\limsup c_n < 0$ *ise* $\sum a_i = \infty$ *olur.*

xxxx Bunun tersi de doğru. Eğer $\sum a_i$ yakınsaksa koşulu sağlayan $(b_n)_n$ vardır. Galiba b_n olarak $\sum a_i$ serisinin kuyruğunu almak yetiyor. xxxxxxxxxxx
Kanıt: i. $\ell = \liminf c_n > 0$ olsun. O zaman öyle bir $0 < c < \ell$ vardır ki her i için

$$c < c_i = b_i \frac{a_i}{a_{i+1}} - b_{i+1},$$

yani

$$a_i b_i - a_{i+1} b_{i+1} > c a_{i+1}$$

olur. Bu eşitsizlikleri $i = 0$'dan $i = n-1$'e kadar toplarsak, sadeleştirmelerden sonra

$$a_0 b_0 \geq a_0 b_0 - a_n b_n > c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

elde ederiz. Demek ki $\sum a_i$ serisinin kısmi toplamları $a_0 b_0 / c$'den küçüktür, dolayısıyla seri yakınsaktır.

ii. $\ell = \liminf c_n < 0$ olsun. O zaman öyle bir N vardır ki, her $i \geq N$ için

$$b_i \frac{a_i}{a_{i+1}} - b_{i+1} = c_i < 0,$$

yani

$$a_i b_i < a_{i+1} b_{i+1}$$

olur. Demek ki her $i > N$ için,

$$a_N b_N < a_i b_i$$

ya da

$$a_i > a_N b_N \frac{1}{b_i}$$

olur, ki bu da $\sum a_i = \infty$ eşitliğini gösterir. □

Örnekler

19.18. Teorem $(a_n)_n$ dizisinden ziyade $(a_n/a_{n+1})_n$ oranlar dizisi üzerine bir varsayım yaptığından, $(a_n)_n$ dizisi örneği vereceğimize oranlar dizisi örneği vermek yeterli. Bir a sayısı için,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+a}{n}$$

olsun. $b_n = n^2$ olsun. O zaman

$$c_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = n(n+a) - (n+1)^2 = (a-2)n - 1$$

olur. Demek ki eğer $a > 2$ ise, $\lim c_n = \infty > 0$ olur. Böylece teoremin (i) şıkkından $\sum a_i$ serisinin $a > 2$ ise yakınsak olduğu çıkar. (Bir sonraki örnekte daha iyi bir sonuç elde edeceğiz.)

$\sum 1/b_i$ yakınsak olduğundan bu durumda teoremin ikinci şıkkını uygulayamayız.

19.19. Gene bir a sayısı için,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+a}{n}$$

olsun. Bu sefer $b_n = n$ alalım. O zaman

$$c_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = (n+a) - (n+1) = a - 1$$

olur. Demek ki eğer $a > 1$ ise, $\lim c_n = a - 1 > 0$ olur ve teoremin (i) şıkkından $\sum a_i$ serisi $a > 1$ ise yakınsak olur. (Yukardakinden daha iyi bir sonuç.)

Bu sefer $\sum 1/b_i = \infty$ olduğundan teoremin (ii) şıkkını da uygulayabiliriz: Eğer $a < 1$ ise $\sum a_i$ serisi ıraksaktır.

Eğer $a = 1$ ise kıstas bir sonuca varamıyor.

19.20. Teoremde $b_n = 1$ alırsak, d'Alembert kıstasını buluruz.

Sonuç 19.10 (Genelleştirilmiş Raabe Kıstası)**.** *$\sum a_i$ pozitif bir seri olsun.*

i. *Eğer* $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ *ise* $\sum a_i$ *yakınsar.*

ii. *Eğer* $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ *ise* $\sum a_i$ *ıraksar.*

Kanıt: Teoremde $b_n = n$ almak yeterli. □

19.4 Dirichlet ve Abel Kıstasları

Bu bölümde terimleri illa pozitif olmak zorunda olmayan serilerin yakınsaklığıyla ilgileneceğiz.

$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki dizi olsun.

$$A_n = a_0 + \cdots + a_n$$

olsun. O zaman

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = A_n b_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} A_i (b_{i+1} - b_i) \tag{1}$$

olur. Nitekim sağdaki ifadede, $i \le j < n+1$ ise $a_i b_j$ terimi bir kez $A_{j-1}b_j$'de bir kez de $A_j b_j$'de beliriyor, ama bu ifadeler ters işaretli olduklarından bunlar birbirini götürüyor ve a_ib_j kalmıyor. $i < n+1$ ise a_ib_{n+1} ifadeleri de sadeleşiyor. Böylece sağ tarafta sadece a_ib_i ifadeleri kalıyor. Aynı eşitliği şöyle de kanıtlayabiliriz: $A_{-1} = 0$ tanımıyla,

$$\sum_{i=0}^{n} a_ib_i = \sum_{i=0}^{n}(A_i - A_{i-1})b_i = \sum_{i=0}^{n} A_ib_i - \sum_{i=0}^{n} A_ib_{i+1} + A_nb_{n+1}.$$

(1) formülüne ***Abel'in kısmi toplam formülü*** adı verilir[3]. Şu sonucu elde ettik:

Teorem 19.11. *Eğer $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisi ve $(A_nb_{n+1})_n$ dizisi yakınsaksa $\sum a_ib_i$ serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum a_ib_i = \lim_{n\to\infty} A_nb_{n+1} - \sum A_i(b_{i+1} - b_i)$$

olur. □

Teorem 19.12 (Dirichlet Kıstası)**.** *$\sum a_i$ serisi, kısmi toplamları sınırlı olan bir seri ve $(b_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir dizi olsun. O zaman $\sum a_ib_i$ serisi yakınsar.*

Kanıt: $A_n = a_0 + \cdots + a_n$ olsun. Diyelim her n için $|A_n| \le M$. O zaman $\lim_{n\to\infty} A_nb_{n+1} = 0$ olur. Demek ki Teorem 19.11'e göre $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $(b_n)_n$ dizisi azaldığından,

$$|A_i(b_{i+1} - b_i)| = |A_i|\,|b_{i+1} - b_i| = |A_i|(b_{i+1} - b_i) \le M(b_{i+1} - b_i)$$

olur. Ama $\sum(b_{i+1} - b_i)$ serisi teleskopiktir ve $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğunu biliyoruz. Demek ki $\sum(b_{i+1} - b_i)$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisi mutlak yakınsaktır. □

Teorem 19.13 (Abel Kıstası)**.** *$\sum a_i$ serisi yakınsaksa ve $(b_n)_n$ dizisi azalarak ya da artarak yakınsayan bir diziyse $\sum a_ib_i$ serisi yakınsar.*

Kanıt: Yukardaki yazılımı kabul edelim. Varsayıma göre $\sum A_nb_{n+1}$ yakınsar. Teorem 19.11'e göre $\sum A_i(b_{i+1}-b_i)$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlamalıyız. $(|A_i|)_i$ dizisi üstten M tarafından sınırlanmış olsun. O zaman,

$$|A_i(b_{i+1} - b_i)| = |A_i|\,|b_{i+1} - b_i| \le \pm M(b_{i+1} - b_i)$$

olur. Terimleri sağdaki ifade olan seri teleskopik bir seridir ve $(b_i)_i$ dizisinin limiti vardır, demek ki yakınsaktır; dolayısıyla $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisi mutlak yakınsaktır. □

Alıştırmalar

[3]İntegral görmüşler için: Bu formülün integrali parçalara ayırmaya (*integration by parts*) benzediğine dikkatinizi çekeriz.

19.21. $\sum a_i$ serisi yakınsaksa ve $\sum(b_i - b_{i+1})$ serisi mutlak yakınsaksa $\sum a_i b_i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

19.22. $\sum a_i$ serisinin kısmi toplamları sınırlıysa, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ise ve $\sum(b_i - b_{i+1})$ serisi mutlak yakınsaksa $\sum a_i b_i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Bir başka Abel kıstası aşağıda:

Teorem 19.14 (Abel Kıstası). *$\sum_{i\geq 0} x_i$ bir seri olsun. Şu özellikleri sağlayan $(\epsilon_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri varsa,*

1. *$x_n = \epsilon_n y_n$,*
2. *$|\sum_{i=m}^n y_i|$ sayıları üstten sınırlıdır,*
3. *$\sum_{n=0}^\infty |\epsilon_{n+1} - \epsilon_n|$ serisi yakınsaktır,*
4. *$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$,*

o zaman $\sum_{i\geq 0} x_i$ serisi yakınsaktır.

Kanıt: $\sum_{i\geq 0} x_i$ serisinin kısmi toplamlarının bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla 0'dan büyük herhangi bir ϵ sayısı seçelim.

$$y_{m,n} = \sum_{i=m}^n y_i$$

olsun. Varsayıma göre öyle bir A var ki, her m ve n için,

$$|y_{m,n}| \leq A$$

olur. Tanımdan dolayı, her $i < p$ için,

$$y_i = y_{i,p} - y_{i+1,p}$$

olur. Demek ki, her $m < n < p$ için

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=m}^n x_i\right| = \left|\sum_{i=m}^n \epsilon_i y_i\right| &= \left|\sum_{i=m}^n \epsilon_i(y_{i,p} - y_{i+1,p})\right| \\
&= \left|\epsilon_m y_{m,p} + \sum_{i=m}^{n-1} y_{i+1,p}(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i) - \epsilon_n y_{n+1,p}\right| \\
&\leq |\epsilon_m||y_{m,p}| + \sum_{i=m}^{n-1} |y_{i+1,p}||\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n||y_{n+1,p}| \\
&\leq A\left(|\epsilon_m| + \sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n|\right)
\end{aligned}$$

olur. Biz, her $m < n$ için

$$\left|\sum_{i=m}^n x_i\right| \leq A\left(|\epsilon_m| + \sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n|\right)$$

eşitsizliğini aklımızda tutalım. Şimdi sağdaki ifadeyi (yeterince büyük $m < n$ sayıları için) ϵ'dan küçük yapacağız. $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|\epsilon_n| < \frac{\epsilon}{3A}$$

olur. Ayrıca,

$$\sum_{i\geq 0} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i|$$

serisi yakınsak olduğundan, kısmi toplamları bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla öyle bir N_2 vardır ki, her $n > m > N_2$ için,

$$\sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{n+1} - \epsilon_n| < \frac{\epsilon}{3A}$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Her $n > m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| \leq A\left(|\epsilon_m| + \sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n|\right) < A\left(\frac{\epsilon}{3A} + \frac{\epsilon}{3A} + \frac{\epsilon}{3A}\right) = \epsilon$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Eğer $(\epsilon_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir diziyse, üçüncü koşul otomatik olarak sağlanır çünkü,

$$\sum_{i=0}^{n} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| = \epsilon_0 - \epsilon_{n+1} \to \epsilon_0$$

olur.

Bu teoremden yola çıkarak Leibniz teoremini (Teorem 17.1) bir kez daha kanıtlayabiliriz:

Teorem 19.15 (Leibniz)**.** *$(\epsilon_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. O zaman $\sum(-1)^n\epsilon_n$ serisi yakınsaktır.*

Kanıt: $x_n = (-1)^n\epsilon_n$ ve $y_n = (-1)^n$ olsun. Teorem 19.6'nın 1, 2 ve 4'üncü varsayımları bariz biçimde doğru. 3'üncü varsayım ise Teorem 14.2. □

Her ne kadar karmaşık sayıları henüz görmediysek ve, en azından bu ve sonraki ciltlerde görmeyeceksek de, bu teoremi terimleri karmaşık sayılar olan ilginç bir seriye uygulayalım:

Karmaşık Sayıları Bilenlere Örnek. *Eğer $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n}$ serisi yakınsaktır.*
Kanıt: Eğer $z \in 2\pi\mathbb{Z}$, $|e^{inz}/n| = 1/n$ olur ve bu durumda serinin sonsuza gittiğini biliyoruz. Şimdi $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ olsun. Abel Kıstası'nda, $x_n = e^{inz}/n$, $y_n = e^{inz}$ ve $\epsilon_n = 1/n$ olsun. Sadece 2'nci koşulu kanıtlamak biraz zordur. $a = e^{iz}$ olsun. O zaman, $n > m$ için,

$$\sum_{k=m}^{n} y_k = \sum_{k=m}^{n} e^{ikz} = \sum_{i=m}^{n} a^k = \frac{a^m - a^{n+1}}{1-a}$$

olur ve bu sayıların üstten sınırlı olduklarını kanıtlamak kolaydır. □

Daha genel olarak eğer $(\epsilon_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir diziyse, $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ise $\sum \epsilon_n e^{inz}$ serisi yakınsaktır. Bunun da kanıtı aynen yukardaki gibidir. Gerçel ve karmaşık kısımları ayırarak, bundan,

$$\sum \epsilon_n \cos nz \text{ ve } \sum \epsilon_n \sin nz$$

serilerinin de yakınsak olduğu çıkar. □

Karışık Alıştırmalar

1. $(a_n)_n$ dizisinin limiti a olsun. Eğer her $n, m > N$ için, $|a_n - a_m| < \epsilon$ ise, her $n > N$ için, $|a_n - a| < \epsilon$ olduğunu kanıtlayın.

2. a ve b iki gerçel sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisini şöyle tanımlayalım: $x_1 = a$, $x_2 = b$ ve her $n \geq 2$ için,
$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$
olsun. Yani dizinin her terimi önceki iki terimin aritmetik ortalaması. Şimdi $y_1 = x_1$ ve her $n \geq 2$ için, $y_n = x_n - x_{n-1}$ olsun.

   i. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın. **İpucu 1:** Dizinin ilk birkaç terimini kâğıt üstünde gösterin. **İpucu 2:** $a \leq b$ varsayımının bir zararı olamaz. Önce tümevarımla, her k için,
$$x_{2k-1} \leq x_{2k+1} \leq x_{2k+2} \leq x_{2k}$$
eşitsizliklerini kanıtlayın. Demek ki $(x_{2k})_k$ dizisi azalmaz, $(x_{2k+1})_k$ dizisi artmaz ve her k ve ℓ için $x_{2k+1} \leq x_{2\ell}$ olur. Sonra, gene tümevarımla, $x_{2k+2} - x_{2k+1} = (b-a)/2^k$ eşitliğini kanıtlayın. Bu kadar ipucu yeterli olmalı.

   ii. $\sum y_n$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Teorem 14.2.

   iii. Buradan x_n'nin değerini a ve b cinsinden bulun. **İpucu:** x_n, $\sum y_n$ serisinin kısmi toplamıdır. Ayrıca $n \geq 2$ için, $y_n = (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}}$ dir.

   iv. $\lim_{n\to\infty} x_n$'yi bulun.

3. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 1$ için,
$$\sum \frac{x^{2^n}}{(1-x)^{2^{n+1}}}$$
serisinin yakınsaklığını ve ıraksaklığını tartışın.

4. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadıklarına karar verin ve yakınsıyorlarsa hangi sayıya yakınsadıklarını bulun:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2+3i+2}{2i^3+i+4}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5i^3+2}}{2i^3+3i+4}, \quad \sum \frac{i}{2i+1}, \quad \sum \frac{i}{2i^2+1},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{i+1}}, \quad \sum \frac{2^i-1}{2^i}, \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{5^i}{6^{i+1}}, \quad \sum \frac{2^i+3}{3^i},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}, \quad \sum (\sqrt[3]{i+1} - \sqrt[3]{i}), \quad \sum \frac{2i+1}{(i^2+1)(i^2+2i+2)}, \quad \sum_{i=3}^{\infty} \frac{4i-3}{i^3-4i}.$$

5. Aşağıdaki serilerin yakınsayıp yakınsamadıklarına karar verin:

$$\sum(-1)^i\frac{i}{1+i^2},\quad \sum(-1)^i\frac{i}{i+1},\quad \sum(-1)^i\frac{5^{3i-1}}{(3i-1)!},$$

$$\sum\frac{5^{3i-1}}{(3i-1)!},\quad \sum(-1)^i\frac{i^2+1}{i^3+1},\quad \sum(-1)^i\left(\frac{1+2i}{2+3i}\right)^i.$$

6. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığına ya da ıraksaklığına karar verin:

$$\sum\left(\frac{i+3}{i^2+1}\right)^i,\ \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{1+(-1)^i\sqrt{i}}.$$

7. $\sum x_i$ pozitif ve ıraksak bir seri olsun.

$$y_i = \frac{x_i}{x_0+\cdots+x_i}$$

tanımını yapalım. $\sum y_i$ serisinin de ıraksadığını kanıtlayın. İpucu:

$$\sum_{k=0}^{m} y_{i+k} > 1 - \frac{\sum_{k=0}^{m} x_k}{\sum_{k=0}^{i+m} x_k}$$

eşitsizliğini kullanabilirsiniz.

8. Aşağıdaki serilerin hangileri yakınsak, hangileri ıraksaktır?

$$\sum\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},\quad \sum\frac{n^k}{2^n}\ \ (k\in\mathbb{N}\text{ bir sabit}),$$

$$\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)},\quad \sum\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n,$$

$$\sum 3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\quad \sum\frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

$$\sum\frac{n}{\sqrt[n]{n!}},\quad \sum\sqrt[n]{1+2+\cdots+n},$$

$$\sum\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}},\quad \sum\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\sum\frac{2^n n!}{n^n},\quad \sum\frac{3^n n!}{n^n},$$

$$\sum\frac{2^{n^2}}{n!},\quad \sum\left(\sqrt[n]{n}-1\right).$$

9. a_i, $\sqrt{2}$'nin virgülden sonraki i'inci basamağı olsun.

$$\sum a_i x^i = 1+4x+x^2+4x^3+\cdots$$

serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğunu kanıtlayın.

10. $a_0 = 1$ ve $i \ge 1$ için,

$$a_{i+1} = \begin{cases} 2a_i & \text{eğer } i \text{ çiftse}\\ 3a_i & \text{eğer } i \text{ tekse}\end{cases}$$

olsun. $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının $1/\sqrt{6}$ olduğunu kanıtlayın.

11. Sabit bir $r \ne 1$ gerçel sayısı alalım. $a_0 = 1$ ve $i \ge 1$ için,

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{i+r}{i+2}$$

olsun. $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı kaçtır?

12. $\cosh x$ ve $\sinh x$ kuvvet serilerinin türevlerini bulunuz. (Bkz. Alıştırma 18.23.)
13. Altbölüm 18.4'teki Cauchy çarpımını ve Cauchy çarpımı hakkındaki teoremleri kullanarak şu (trigonometrik) eşitlikleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\
\sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y, \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

14. Terimleri $a_n = 1! + \sqrt{2! + \sqrt{3! + \cdots + \sqrt{n!}}}$ olan dizi yakınsak mıdır?
15. Terimleri $a_n = 1! + \sqrt[2]{2! + \sqrt[3]{3! + \cdots + \sqrt[n]{n!}}}$ olan dizi yakınsak mıdır?