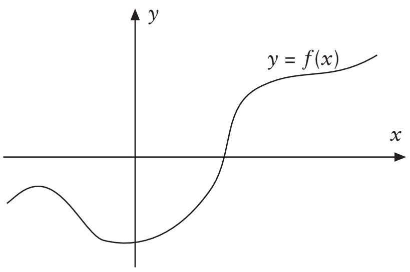
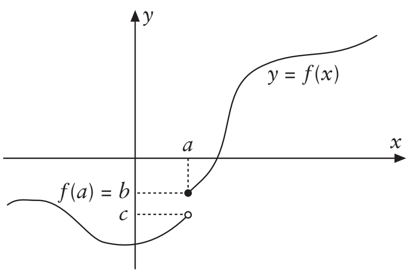
42. Süreklilik

Matematiğin en önemli ve en temel konularından birine geldik: Süreklilik. Her zamanki gibi önce kavramın sezgisel anlamını açıklayalım.

Bazı fonksiyonların grafiğinde kopukluk yoktur, bazılarında ise tam tersine kopukluk vardır.



Grafiğinde kopukluk olmayan bir fonksiyon



Grafiğinde a noktasında kopukluk olan bir fonksiyon

Birinci örnekte kopukluk yokken ikinci örnekte *a* noktasında bir kopukluk, ani bir sıçrama var.

Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz, ama şimdilik sezgi kazandırmak amacıyla söyleyelim: Birinci örnekteki gibi fonksiyonlara ***sürekli*** denir. İkinci örnekteki fonksiyon ise *a* noktasında ***süreksizdir***, orada bir kopukluk, bir sıçrama vardır.

İnsanlar süreklilikten daha çok hoşlanırlar. Süreklilik olağan durumdur, anlaşılması, başa çıkması daha kolaydır. Deprem gibi, uçurumdan yuvarlanmak gibi, basınç düşmesi gibi, olağan koşulların sürekliliğinin bozulduğu durumlar ölümcül olabilir.

Atomun varlığı kanıtlandığından beri maddenin sürekli olmadığını, aslında varlıktan çok yokluk olduğunu biliyoruz. Öte yandan makroskopik düzeyde maddenin sürekli olduğunu varsaymak - bu varsayım yanlış da olsa - maddeyi (ve hareketini) algılamamızda kolaylık sağlar.

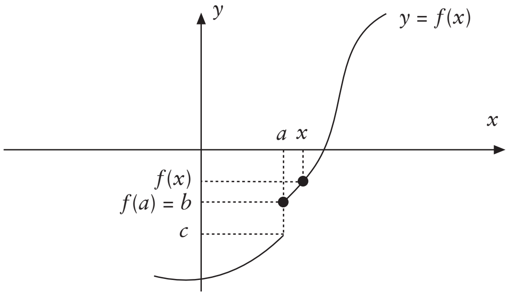
Her ne kadar saniye, dakika, gün ve hafta gibi parçalara ayırsak da, zamanın da sürekli olduğunu varsayarız. Örneğin, insan duyularıyla algılanmayacak bir süre için bir elmanın kaybolup tekrar var olabileceği, hatta tüm evrenin donup tekrar harekete geçeceği varsayımı bize pek inandırıcı gelmez. Ama neden olmasın!

Velhasılı kelam, evren sürekli de süreksiz de olsa, sürekliyi anlamak daha kolaydır.

Sezgisel olarak kolayca algılanabilen süreklilik/süreksizlik kavramını matematikselleştirmek pek o kadar kolay olmamıştır. Sürekliliğin doğru düzgün matematiksel bir tanımını vermek 19'uncu yüzyılda Cauchy'ye nasip olmuştur. Tam matematiksel tanımı sunmadan önce sezgilerimize biraz daha matematiksel bir biçim vermeye çalışalım.

"Süreksiz" diye nitelendirdiğimiz ikinci fonksiyona dikkatlice bakalım. Belli ki sorun *a* noktasında. Bu noktada fonksiyon *b* değerini alıyor. Peki *a* çok az değiştiğinde fonksiyonun aldığı değer ne oluyor?

Eğer x, a'nın sağında (yani a'dan daha büyük) ama a'ya çok yakınsa, $f(x)$, $f(a)$'nın, yani b'nin çok yakınındadır. Hatta x'i



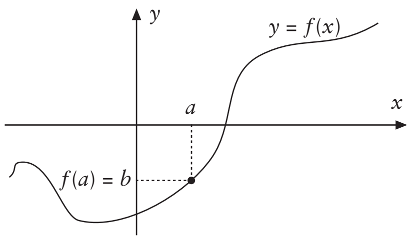
a'nın sağında ve x'e çok çok yakın alarak, $f(x)$ değerini $f(a)$'ya dilediğimiz kadar yaklaştırabiliriz. x, a'ya sağdan ne kadar yakın olursa, şekilden de anlaşılacağı üzere, $f(x)$ değeri $f(a)$'ya o kadar yakın olur.

Öte yandan a'ya sol taraftan yaklaştığımızda, fonksiyonun değerleri $f(a)$'ya, yani b'ye değil, b'den uzakta olan c'ye çok yaklaşırlar; a'ya soldan istediğimiz kadar sokulalım, fonksiyonun değerleri b'ye çok çok yaklaşamazlar.

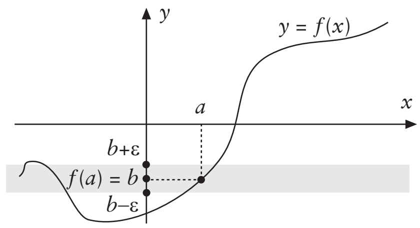
İlk fonksiyonda böyle bir sorun olmaz. x yavaş yavaş değiştiğinde, $f(x)$ de yavaş yavaş değişir. İkinci fonksiyonda ise x, a'nın solundan sağına ya da sağından soluna geçerken bir sıçrama yaşanır.

Sürekliliğin matematiksel tanımını vermenin zamanı geldi.

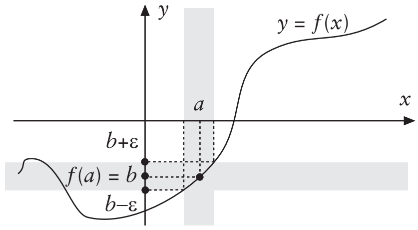
A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f'nin a noktasında sürekli olmasının matematiksel anlamını vereceğiz. $b = f(a)$ olsun. Aşağıdaki şekilden takip edelim.



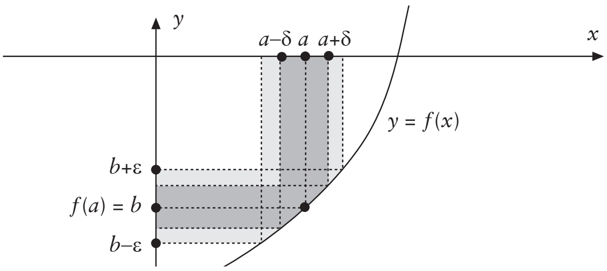
Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. ε'u çok çok küçük (ama pozitif) bir sayı olarak algılayalım. Ve y ekseninde $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığına ve o aralığın belirlediği yatay şerite bakalım.



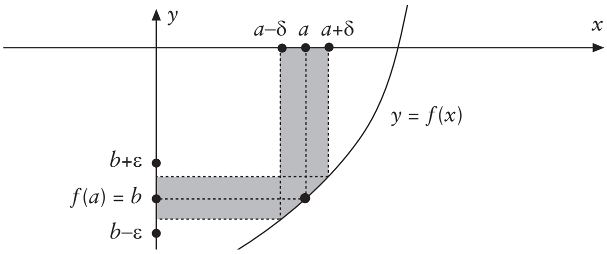
Bu şerit fonksiyonun grafiğini çeşitli yerlerden keser ve bu kesişimler a'nın civarında bir bölge belirlerler.



a civarında grafiğe daha yakından bakalım:



Öyle bir $\delta > 0$ var ki, $(a - \delta, a + \delta)$ aralığının f altında imgesi $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığının içine düşer. Sadeleştirilmiş şekil aşağıda:



İşte "a'da sürekliliğin" tanımı aynen bunu ifade edecek, tek bir farkla ki

$(a - \delta, a + \delta)$ aralığının f altında imgesi
$(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığının içine düşer

yerine

$(a - \delta, a + \delta) \cap A$ kümesinin f altında imgesi
$(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığının içine düşer

demeliyiz çünkü f fonksiyonu $(a - \delta, a + \delta)$ aralığının tüm noktalarında tanımlı olmayabilir.

Matematiksel tanımı salalım:

Tanım. A, $\mathbb{R}$'*nin bir altkümesi*, $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $a \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için*,

$$f((a - \delta, a + \delta) \cap A) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ *varsa*, f *fonksiyonuna* ***a'da sürekli*** *denir*.

Aynı tanımı kümeler (daha doğrusu aralıklar) yerine elemanlarla ifade edebiliriz:

Tanım. A, $\mathbb{R}$'*nin bir altkümesi*, $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $a \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için*, A'*nın*

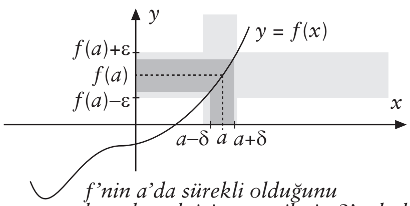
$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her x elemanının

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini de sağlamak zorunda olduğu bir $\delta > 0$ *varsa*, *o zaman f fonksiyonuna* ***a'da sürekli*** *denir*.

İki tanım arasında bir ayrım olmadığına okur ikna olmalıdır; bir ipucu verelim: $|x - a| < \delta$ koşuluyla $x \in (a - \delta, a + \delta)$ koşulu arasında bir ayrım yoktur.



f'nin a'da sürekli olduğunu kanıtlamak için: ε verilmiş, δ'yı bul

Yukardaki tanımı biraz daha açalım. Verilmiş bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ elemanında sürekli olması için her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki, her $x \in A$ için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (*)$$

olsun.

Tanımı çerçeveleyelim ki sürekli gözümüzün önünde bulunsun:

Tanım: *Bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında* ***sürekli*** *olması için,*

her $\varepsilon > 0$ için
öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki,
her $x \in A$ için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (*)$$

olsun.

Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyona ***sürekli*** fonksiyon denir.

Tanımın Tartışması. Her şeyden önce, tüm uyarılara karşın nerdeyse her öğrencinin kaçınılmaz olarak yaptığı ve muhtemelen bu uyarıdan sonra da yapacağı bir yanlıştan sözedelim. Fonksiyonun a'da sürekli olduğunu kanıtlamak için, verilen her $\varepsilon > 0$ için (*) koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ bulmalıyız. Bu δ sayısı ε'a ve a'ya göre değişebilir ama x'ten bağımsızdır. Tekrar edelim: f fonksiyonu, $a \in X$ noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı veriliyor ve (*) koşulunu **her** $x \in A$ için sağlandığı x'ten **bağımsız** bir $\delta > 0$ aranıyor. Bu nokta kesinlikle gözden kaçmamalı.

Tanımı daha simgesel olarak yazmak yararlı olabilir:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ (|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Tanımı tartışmaya devam edelim.

Eğer verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ sayısı (*) koşulunu sağlıyorsa, δ'dan küçük pozitif δ_1'ler de (*) koşulunu aynı ε için sağlarlar. Yani verilmiş bir ε için (*) koşulunu sağlayan tek bir δ yoktur ve eğer (*) koşulunu sağlayan bir δ varsa, istersek ve içimizden öyle geçiyorsa ya da gerekliyse, δ'yı 1'den, 1/2'den, 1/100'den ve istediğimiz herhangi pozitif bir sayıdan küçük seçebiliriz.

Gene de bulunacak δ'nın verilen ε'a göre değiştiğini belirtelim: Genelde, ε küçüldükçe, δ da küçülmek zorundadır. Nitekim eğer (δ, ε) çifti (*) koşulunu sağlıyorsa ve eğer $\varepsilon_1 < \varepsilon$ ise, o zaman (δ, ε_1) çifti (*) koşulunu sağlamayabilir, çünkü bunun için δ yeterince küçük olmayabilir, δ'yı daha da küçük seçmek zorunda kalabiliriz. Bu yüzden bazen δ yerine δ_ε yazmak yerinde olabilir. Hatta δ, a'ya göre de değişebileceğinden, δ yerine $\delta_{a,\varepsilon}$ da yazılabilir.

Bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlamak için, önce herhangi bir pozitif ε sayısı seçilir. Sonra, $x \in A$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

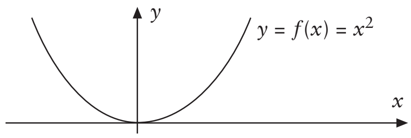
eşitsizliğinin sağlanması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiği araştırılır. Bunun için, genellikle,

$$|f(x) - f(a)|$$

ifadesiyle oynanır. Amaç, bu ifadeyle oynayarak, ifadeyi, bir biçimde, içinde $|x - a|$ bulunan bir ifadeden daha küçük olarak ifade etmektir. Bilmem kendimizi iyi ifade edebildik mi?

Öğretici olması açısından çok basit olmayan, ama gene de çok çok zor olmayan örnekler sunmadan önce a noktasının tanım kümesinde olmak zorunda olduğunu anımsatalım (yoksa $f(a)$'dan sözedemeyiz bile!)

Örnek 42.1. *$f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonu süreklidir.* (*Burada* $A = \mathbb{R}$.)



Kanıt: $a \in \mathbb{R}$ olsun. Rastgele bir pozitif ε sayısı seçelim. ε sayısını çok küçük bir sayı olarak algılayalım. Şimdi, $x \in A$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

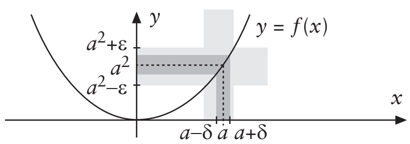
eşitsizliğinin sağlanması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini araştıralım; bakalım x'in a'ya belli bir $\delta > 0$ mesafesinden daha yakın olması bu eşitsizliğin sağlanması için yeterli oluyor mu, böyle bir δ var mı? Bunun için

$$|f(x) - f(a)|$$

ifadesiyle oynayacağız. Oynayalım:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|.$$

Oynadık. En sağdaki $|x - a|$ ifadesi hoşumuza gidiyor, çünkü x'i $|x - a|$ çok küçük olacak şekilde seçersek, $|x - a||x + a|$ ifadesinin de çok küçük olma (ε'dan küçük olma) ihtimali var ve bizim de istediğimiz tam bu. Ama eğer $|x + a|$ çok artarsa, o zaman $|x - a||x + a|$ ifadesini istediğimiz kadar küçültemeyebiliriz. Demek ki $|x + a|$ ifadesinin çok artmadığını, belli bir sayı tarafından üstten sınırlandığını kanıtlamalıyız. Eğer x herhangi bir gerçel sayıysa, bu doğru değil elbet, ama x'i a'ya yakın seçeceğimizi unutmayalım. Eğer x'in a'ya mesafesi ilelebet artmıyorsa, $|x + a|$ ifadesi de zaptedilemez bir biçimde artamaz.



ε verilmiş, δ'yı bulmalıyız.
Eğer öyle bir δ varsa, aynı özelliği sağlayan 1'den küçük bir δ vardır.
İstersek, işimize geliyorsa, δ'yı 1'den küçük bulmaya çalışabiliriz.

$|x + a|$ ifadesini üstten sınırlamak için, - ilerde bu sözü tutmak üzere - bulacağımız δ'yı 1'den küçük alacağımız sözünü verelim. (Yukardaki şekil böyle bir seçim yapabileceğimizi açıklamaya çalışıyor.) O zaman, x'i,

$$|x - a| < \delta \leq 1$$

olacak biçimde seçmiş olacağız ve bu seçimle,

$$-1 < x - a < 1,$$

ya da

$$a - 1 < x < a + 1,$$

yani

$$2a - 1 < x + a < 2a + 1$$

olur; böylece, eğer $A = \max\{|2a - 1|, |2a + 1|\}$ ise,

$$|x + a| < A$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz. Başladığımız hesaba bu eşitsizlik ışığında devam edelim:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < |x - a|A.$$

Demek ki $|f(x) - f(a)|$ ifadesinin ε'dan küçük olması için

$$|x - a|A$$

ifadesinin ε'dan küçük olması yeterli. Dolayısıyla $|x - a|$'yı ε/A'dan küçük seçersek işimiz iş. Ama bir dakika! $|x - a|$'nın sadece ε/A'dan küçük olması yetmez, 1'den de küçük olmalı. Yani eğer

$$\delta = \min\{\varepsilon/A, 1\}$$

olarak seçersek, o zaman $|x - a| < \delta$ eşitsizliğinden

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliği çıkar.

Bu kanıtı toparlayıp vasat bir analiz kitabında yazıldığı biçimiyle gösterelim:

$\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$A = \max\{|2a - 1|, |2a + 1|\}$$

olsun. Tanımdan dolayı $A > 0$ olur. Ve

$$\delta = \min\{\varepsilon/A, 1\}$$

olsun. δ, elbette pozitif bir sayı. Ve son olarak, x,

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlasın. Bundan, sırasıyla,

$$-\delta < x - a < \delta,$$
$$-\delta + a < x < \delta + a,$$
$$-1 + a < x < 1 + a,$$
$$-1 + 2a < x + a < 1 + 2a,$$
$$|x + a| < \max\{-1 + 2a, 1 + 2a\} = A$$

eşitsizlikleri çıkar. Bu hesapları $|x + a|$'yı sınırlamak için yaptık:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$$
$$< |x - a|A < \delta A \leq (\varepsilon/A)A = \varepsilon$$

buluruz, tam istediğimiz gibi. □

Kanıtın çok çok kolay olmadığı doğru ama işte matematik böyle bir şey.

Alıştırmalar

1. $f(x) = x^2 + 3x - 7$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

2. $f(x) = x^3$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

Sürekli olmayan bir fonksiyon örneği verelim. Verelim ama önce bir noktada sürekli olmamanın ne demek olduğunu daha yakından irdeleyelim. Bir iki sayfa yukarda, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olması için,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ (|x-a| < \delta \to |f(x)-f(a)| < \varepsilon).$$

önermesinin doğru olması gerektiğini söylemiştik. Bu önermenin tam tersini, yani zıddını yazalım. Bunun için basit mantık kullanacağız. Yukardaki önermenin zıddı,

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in A\ (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$$

önermesidir. Yani bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olmaması için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı olmalıdır ki, hangi $\delta > 0$ sayısı alınırsa alınsın, $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan ama

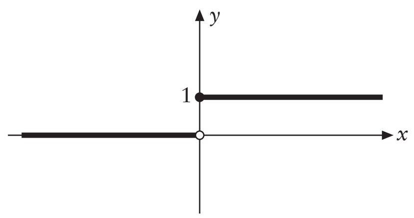
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlamayan bir $x \in A$ noktası olmalıdır.

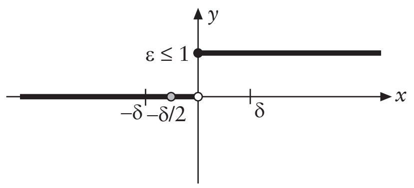
Örneklerle her şeyin daha açık olacağından kuşkumuz yok! Belki sosyoloji kitapları dışında hemen her kitapta bulunan standart bir örnek verelim.

Örnek 42.2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ *fonksiyonu sürekli değildir.*

f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye gider ve grafiği şöyledir:



Grafikten de anlaşılacağı üzere, bu fonksiyon 0 dışında her noktada süreklidir, sadece 0 noktasında süreksizdir. Bu söylediklerimizi matematiksel olarak kanıtlayalım.



1. *Fonksiyon $a = 0$ noktasında sürekli değildir.*

(*) koşulunun hiçbir $\delta > 0$ için doğru olmadığı bir $\varepsilon > 0$ bulmak gerekiyor. Bir sonraki şekilden takip edin. $\varepsilon = 1$ olsun. Şimdi $\delta > 0$ ne olursa olsun (daha doğrusu, ne kadar küçük olursa olsun), $x = -\delta/2$ alırsak,

$$|x - a| = |-\delta/2 - 0| = |-\delta/2| = \delta/2 < \delta$$

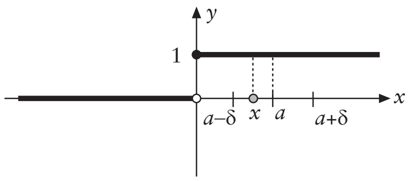
olur ama

$$|f(x) - f(a)| = |f(-\delta/2) - f(0)| = |0 - 1| = 1 \geq 1 = \varepsilon$$

olur, yani $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğru olmaz.

Aynı sonucu $\varepsilon = 1/2$, ya da herhangi bir $\varepsilon > 0$ alarak da bulabilirdik tabii, yeter ki $\varepsilon \leq 1$ olsun.

2. *Eğer $a \neq 0$ ise fonksiyon a noktasında süreklidir.*



$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (*) koşulunun bir $\delta > 0$ tarafından sağlandığını göstermemiz gerekiyor. $\delta = |a|/2$ olsun. x,

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlasın. O zaman,

$$-|a|/2 = -\delta < x - a < \delta = |a|/2,$$

yani

$$a - |a|/2 < x < a + |a|/2$$

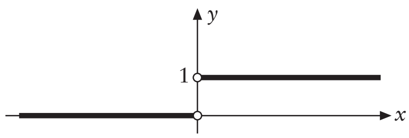
olur. Bundan, eğer $a < 0$ ise, $x < a + |a|/2 = a/2 < 0$, ve $a > 0$ ise, $0 < a/2 = a - |a|/2 < x$ bulunur. Yani a ile x'in işaretleri aynıdır, biri pozitifse diğeri de pozitif, biri negatifse diğeri de negatif olur. Dolayısıyla $f(x) = f(a)$ olur, yani

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Bir önceki örneği hafifçe değiştireceğiz, fonksiyonun kuralı aynı olacak ama tanım kümesi bu sefer $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ olacak.

Örnek 42.3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x > 0 \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x < 0 \textit{ ise} \end{cases}$ *fonksiyonu süreklidir*



Kanıtı aynen bir önceki kanıt gibidir, ama tabii a'yı bu sefer 0 seçemeyiz, çünkü fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$'dır. f, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$'dan $\mathbb{R}$'ye gider.

Şimdi ilk bakışta şaşırtıcı, ikinci bakışta doğal gelebilecek bir sonuç kanıtlayalım.

Örnek 42.4. *$\mathbb{Z}$'den $\mathbb{R}$'ye giden herhangi bir fonksiyon süreklidir.*

Kanıt: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Burada $A = \mathbb{Z}$'dir. $a \in \mathbb{Z}$, herhangi bir tamsayı olsun. Ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. δ'yı

$$0 < \delta \leq 1$$

eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olarak seçelim, örneğin $\delta = 1/2$ olsun. O zaman eğer $x \in \mathbb{Z}$ ise ve x,

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlıyorsa, $x = a$ olmak zorundadır çünkü iki değişik tamsayı arasındaki fark 1'den küçük olamaz. Demek ki, bu durumda,

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

olur. İstediğimiz bir kez daha kanıtlanmıştır.

Yukardaki örnekteki fonksiyonu her noktada sürekli kılan, değişik tamsayılar arasındaki mesafenin 1'den küçük olamayacağıdır. Daha doğrusu, her tamsayının belli bir "komşuluğu"nda bir başka tamsayının bulunamayacağıdır. Bu fikri aşağıdaki alıştırmada sömüreceğiz.

Alıştırmalar

1. $A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

2. A, yukardaki gibi olsun. $B = A \cup \{0\}$ olsun. $f : B \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin 0'da sürekli olması için,

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0)$$

eşitliğinin yeter ve gerekli olduğunu kanıtlayın.

3. A, $\mathbb{R}$'nin ***ayrık*** bir altkümesi olsun, yani her $a \in A$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap A = \{a\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\delta > 0$ olsun. (Burada δ, a'ya göre değişebilir.) A'dan $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

4. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in A$, A'dan ***ayrık*** bir eleman olsun, yani $(a - \alpha, a + \alpha) \cap A = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha > 0$ olsun. A'dan $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun a'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

5. $f(x) = [x]$ (= x'in tamkısmı, bkz. Teorem 3.6). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu hangi noktalarda sürekli değildir?

6. $\mathbb{R}$'nin sonlu bir kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

7. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden sürekli bir fonksiyonun sabit olması gerektiğini kanıtlayın.

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun ama imgesi sonlu olsun. f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

9*. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden her sürekli fonksiyonun sabit olduğunu kanıtlayın.

10*. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden her sürekli ve birebir fonksiyonun tersinin de sürekli olduğunu kanıtlayın.

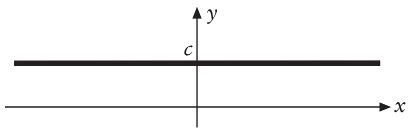
Bir başka klasik örnekle devam edelim:

Örnek 42.5. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x \in \mathbb{Q} \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x \notin \mathbb{Q} \textit{ ise} \end{cases}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$*'nin* *fonksiyonu* $\mathbb{R}$*'nin hiçbir noktasında sürekli değildir.*

Bu fonksiyon nasıl sürekli olsun ki, fonksiyon zırt pırt 0 ve 1 değerlerini alıyor! Biçimsel kanıtı okura bırakıyoruz. Bir ipucu verelim $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümelerinin her ikisi de $\mathbb{R}$'de yoğundurlar, yani boşküme olmayan herhangi bir açık aralıkta hem kesirli hem de kesirli olmayan sayılar vardır.

Kolay (hatta bu aşamada biraz fazla kolay) ama önemli iki örnek geliyor son olarak:

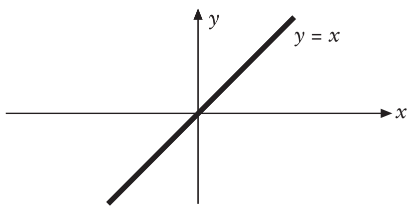
Örnek 42.6. *Sabit bir fonksiyon süreklidir.*



Sabit c fonksiyonunun grafiği kesintisizdir, dolayısıyla bu fonksiyon her noktada süreklidir.

Kanıt: f sabit bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ ne olursa olsunlar, hep $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ olur. Demek ki f süreklidir.

Örnek 42.7. *Özdeşlik fonksiyonu süreklidir.*



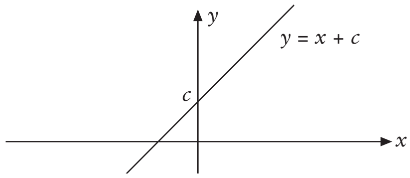
Özdeşlik fonksiyonu $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$'nin *grafiği çapraz doğrudur ve her doğru gibi bu grafik kesintisizdir. Dolayısıyla, sezgisel bir bakış açısıyla,* $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ *fonksiyonu her noktada sürekli olmalıdır.*

Kanıt: Özdeşlik fonksiyonunun $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ kuralıyla tanımlanmış $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olduğunu anımsatırız. $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\delta = \varepsilon > 0$ alalım. O zaman $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $a \in \mathbb{R}$ için,

$$|\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

olur; bu da istediğimizi kanıtlar.

Örnek 42.8. *Her $c \in \mathbb{R}$ için, $x \mapsto cx$ ve $x \mapsto c + x$ sürekli fonksiyonlardır.*



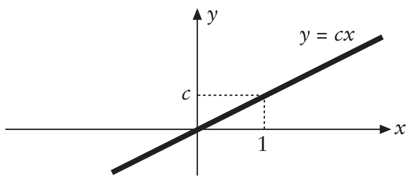
Kanıt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x + c$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin her noktada sürekli olduğunu kanıtlayalım. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $\delta = \varepsilon$ alalım. O zaman, $|x - a| < \delta$ ise,

$$|f(x) - f(a)| = |(x + c) - (a + c)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. □

Çarpmaya geçmeden önce ilerde çok önemli olacak bir noktaya parmak basalım. Genellikle, bulunan δ sayısı a ve ε sayılarına göre değişir. δ'nın ε'dan bağımsız olması nerdeyse imkânsızdır da yukardaki son üç örnekte olduğu gibi δ, a'dan bağımsız olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda çok güçlü bir süreklilik sözkonusudur ve buna ***düzgün süreklilik*** adı verilir. Analizin çok önemli bir kavramı olan düzgün sürekliliğe ilerde sık sık değineceğiz.

Çarpmaya gelelim. $c \in \mathbb{R}$ olsun. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = cx$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin her noktada sürekli olduğunu kanıtlayalım. Eğer $c = 0$ ise, sabit 0 fonksiyonunu elde ederiz ve bu fonksiyonun (düzgün) sürekli olduğu-



nu Örnek 42.6'dan biliyoruz. Bundan böyle $c \neq 0$ varsayımını yapalım. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\delta = \varepsilon/|c|$$

olsun. O zaman, eğer

$$|x - a| < \delta$$

ise,

$$|f(x) - f(a)| = |cx - ca| = |c||x - a| < |c|\delta = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Demek ki bu fonksiyon da süreklidir, üstelik düzgün süreklidir.

Bundan sonraki sonuçlar matematikte "folklor" olarak nitelendirilir. Yani herkesin bildiği ama kitaplarda pek yazılmayan sonuçlar... Şöyle bir okuyup geçebilirsiniz.

Örnek 42.9. Sürekli Fonksiyonları Yapıştırmak/Birleştirmek. İki sürekli fonksiyonu yapıştırarak (ya da birleştirerek) her zaman sürekli bir fonksiyon elde etmeyiz. Örneğin Örnek 2'deki fonksiyon iki sürekli fonksiyonun birleşimidir (hangileri?) ama elde edilen fonksiyon sürekli değildir. Örnek 5'te de aynı sorun vardır. Öte yandan Örnek 3'teki gibi bazı durumlarda yapıştırılarak elde edilen iki sürekli fonksiyon sürekliliği korur:

Teorem 42.1. *$a < b$ ve $c < d$ olsun.*

$$f : (a, b) \to \mathbb{R} \text{ ve } g : (c, d) \to \mathbb{R}$$

iki sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca her $x \in (a, b) \cap (c, d)$ için

$$f(x) = g(x)$$

eşitliğinin doğru olduğunu varsayalım, o zaman,

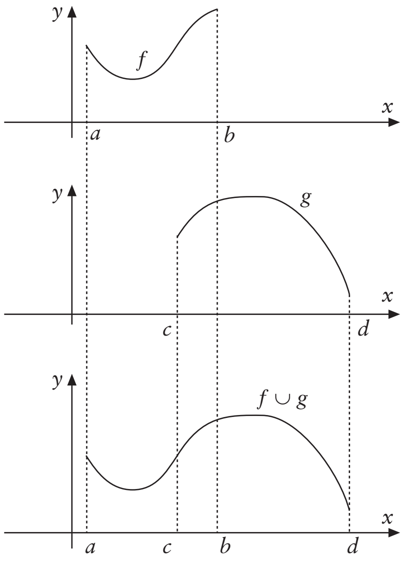
$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \in (a, b) \text{ ise} \\ g(x) & \text{eğer } x \in (c, d) \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanan

$$f \cup g : (a, b) \cup (c, d) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu süreklidir.

Elde edilen $f \cup g$ fonksiyonunun grafiğinin f ve g fonksiyonlarının grafiğinden nasıl elde edileceği aşağıdaki şekilde gösteriliyor.



$f \cup g$ fonksiyonunun grafiğini elde etmek için, f ve g fonksiyonlarının grafiklerini birleştirmek yeterlidir.

Önermenin, Örnek 42.3'teki gibi,

$$(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$$

olduğu zaman da doğru olduğuna dikkatinizi çekeriz. Örneğin $b = c$ olduğunda... Bu dediğimiz, ince ama önemli bir ayrıntıdır.

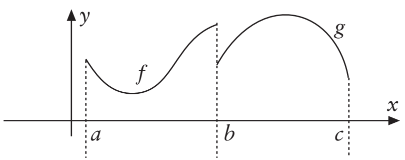
Ayrıca fonksiyonların tanım aralıklarını kapalı da alabilirdik, önerme gene doğru olurdu. Bunun özel bir hali

$$f(b) = g(b)$$

eşitliğini sağlayan

$$f : (a, b] \to \mathbb{R} \text{ ve } g : [b, c) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının yapıştırılmasıyla elde edilen fonksiyondur.



Eğer f, (a, b) aralığının her noktasında sürekliyse ve g, (b, c) aralığının her noktasında sürekliyse, o zaman $f \cup g$ fonksiyonu $(a, b) \cup (b, c)$ kümesinin her noktasında süreklidir. b noktası $f \cup g$ fonksiyonunun tanım kümesinde olmadığı için b noktasındaki süreksizlik intibaı aldatıcıdır.

Öte yandan aynı önerme Örnek 2'de görüldüğü gibi (a, b) ve $[b, c)$ aralıkları için yanlıştır.

(a, b) ve (c, d) yerine $\mathbb{R}$'nin bambaşka altkümelerini alırsak da teorem yanlış olur. Bkz. Örnek 42.5.

Alıştırma. Teorem 1'i ve daha sonra söylenenleri kanıtlayın.

Yerellik

Önermenin doğruluğu sürekliliğin "yerel" bir kavram olmasından kaynaklanmaktadır. Bu "yerel" kavramını biraz açalım; analizde çok önemlidir.

Bir fonksiyonun belli bir a noktasında sürekli olması, sadece ve sadece o fonksiyonun a civarındaki davranışına göre değişir ve fonksiyonun a'dan uzakta neler yaptığından bağımsızdır. Aşağıdaki şekil okuru en azından görsel olarak doyurmalı.

Bir sonraki önerme ise bu dediğimizin matematikçesidir.

Teorem 42.2. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in X \cap Y$ olsun.*

$$f : X \to \mathbb{R},\ g : Y \to \mathbb{R}$$

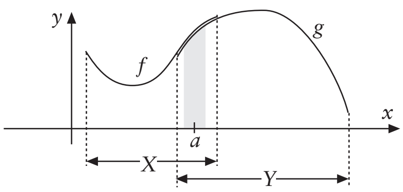
iki fonksiyon olsun. Belli bir $\alpha > 0$ için

$$(a - \alpha, a + \alpha) \subseteq X \cap Y$$

olsun ve bu aralık üstünde $f = g$ eşitliğini, yani her

$$x \in (a - \alpha, a + \alpha)$$

için $f(x) = g(x)$ eşitliğini varsayalım. O zaman, eğer f ve g fonksiyonlarından biri a'da sürekliyse diğeri de a'da süreklidir.



Eğer a noktası civarında f ve g fonksiyonları eşitlerse, o zaman biri a'da sürekliyse, diğeri de süreklidir.

Kanıt: Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için bulmamız gereken δ'yı α'dan küçük seçmek yeterlidir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Alıştırma. $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in X \cap Y$ olsun.
$$f : X \to \mathbb{R},\ g : Y \to \mathbb{R}$$
iki fonksiyon olsun. Belli bir $\alpha > 0$ için
$$(a - \alpha, a + \alpha) \cap Y \subseteq X$$
olsun ve $(a - \alpha, a + \alpha) \cap Y$ üstünde $f = g$ eşitliğini, yani her $x \in (a - \alpha, a + \alpha) \cap Y$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini varsayalım. O zaman, eğer f fonksiyonu a'da sürekliyse g de a'da süreklidir.

Bir sonraki teoremimiz, sürekli bir fonksiyonun kısıtlanmasının da sürekli olduğunu söyleyecek. Önce fonksiyon kısıtlamanın ne demek olduğunu anımsatalım. f, bir A kümesinden bir Y kümesine giden bir fonksiyon olsun. B, A'nın bir altkümesi olsun. $g : B \to Y$ fonksiyonu her $b \in B$ için,
$$g(b) = f(b)$$
kuralıyla tanımlanmış olsun. Yani g'nin alacağı değerler f fonksiyonu tarafından belirlenmiş olsun. Bu durumda g fonksiyonuna f'nin ***kısıtlanışı*** adı verilir ve $g = f_{|B}$ yazılır. Duruma göre, kimi zaman da f'ye g'nin (bir) ***genişlemesi*** adı verilir.

Teorem 42.3. *$b \in B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonu b'de sürekliyse $f_{|B}$ fonksiyonu da b'de süreklidir.*

Kanıt: Kanıtı bundan daha kolay bir teorem zor bulunur. □

Süreklilik konusunda ilerki bölümlerde daha derinleşeceğiz. Şimdilik sürekliliğin oldukça basit özelliklerinden sözedelim.

1. Sürekliliği, $\mathbb{R}$'nin bir A altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar için tanımladık. Oysa, tanıma bakılırsa fonksiyonun illa $\mathbb{R}$'ye değil, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine gitmesi yeterli, nitekim tanımda fonksiyonun varış kümesini hiç kullanmadık, tek kullandığımız değerlerin gerçel sayılar olmasıydı. Yani A ve B, $\mathbb{R}$'nin altkümeleriyse ve $f : A \to B$, A'dan B'ye giden bir fonksiyonsa, sürekliliği bu f fonksiyonu için de tanımlayabiliriz, aynı tanımı kabul edelim, olsun bitsin. Bundan böyle sürekliliğin $\mathbb{R}$'nin bir altkümesinden gene $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine giden fonksiyonlar için tanımlandığını kabul edeceğiz.

2. Eğer $f : A \to B$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekliyse ve

$$f(A) \subseteq C \subseteq \mathbb{R}$$

ise, aynı grafiği olan ve her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ kuralıyla tanımlanan $g : A \to C$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

3. Eğer $f : A \to B$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekliyse ve $a \in C \subseteq A$ ise, her $x \in C$ için $(f_{|C})(x) = f(x)$ kuralıyla tanımlanan $f_{|C} : C \to B$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir. Bunu biliyoruz.

Öte yandan, $f : A \to B$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse ve $a \in C \subseteq A$ ise,

$$f_{|C} : C \to B$$

fonksiyonu a noktasında pekâlâ sürekli olabilir. Nitekim f ne olursa olsun, $C = \{a\}$ ise $f_{|C}$ fonksiyonu a'da süreklidir! (Bkz. Alıştırma 6.) Biraz daha sofistike bir örnek verelim: f, Örnek 2'deki fonksiyon olsun $A = \mathbb{R}$, $a = 0$ ve

$$C = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$

olsun, ya da

$$C = [0, \infty)$$

olsun. Bu durumda $f_{|C}$ fonksiyonu 0'da süreklidir.

4. $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun.

$$C = \{a \in A : f,\ a\text{'da sürekli}\}$$

olsun. O zaman $f_{|C}$ fonksiyonu süreklidir.

Alıştırmalar

1. $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu a) Tanıma başvurarak, b) Bu bölümdeki sonuçlarla kanıtlayın.

2. f, $(0, 1) \cup (2, 3)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden ve $f(x) = x$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizin. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

3. f, $(0, 2)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden, $(0, 1)$ aralığı üzerinde $f(x) = x$ ve $[1, 2)$ aralığı üzerinde $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizin. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

4. $r \in \mathbb{R}$ olsun. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \geq r \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < r \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Hangi $r \in \mathbb{R}$ sayıları için f süreklidir?

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun ve her x için $f(x) = f(-x)$ olsun. Eğer f, a'da sürekliyse, $-a$'da da sürekli olduğunu kanıtlayın. Bundan f, a'da sürekli değilse $-a$'da da sürekli olamayacağını çıkarın. Aynı şeyi $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon için de yapın.

6. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq f(x) \leq |x|$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonun 0'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

7a. Eğer p ve q birbirine asal iki tamsayıysa, $f(p/q) = |p| + |q|$ olsun. Bu kuralla tanımlanmış olan $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun hiçbir noktada sürekli olmadığını kanıtlayın.

7b. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu, $g(x) = 1/f(x)$ kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonun sürekli olmadığını kanıtlayın.

8. $a \in V \subseteq \mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer

$$a \in I \subseteq V$$

koşulunu sağlayan açık bir I aralığı varsa V'ye a'nın ***komşuluğu*** adı verilir.

Şimdi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için,

$f(a)$'nın her V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$
kümesi a'nın bir komşuluğudur

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

9. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in A$ olsun. A'nın, bir $\varepsilon > 0$ için, $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ altkümesini içeren V altkümelerine a'nın ***A*'da *komşuluğu*** adı verilir. Demek ki a'nın A'da komşuluğu, a'nın (bir önceki soruda tanımlanan) bir komşuluğuyla A'nın kesişimidir.

Şimdi $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için,

$f(a)$'nın $\mathbb{R}$'de her V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$ kümesi a'nın A'da bir komşuluğudur

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

Bir Noktanın Bir Kümeye Mesafesi

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun x ile A arasındaki ***mesafe***,

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\} = \inf_{a \in A} |x - a|$$

olarak tanımlanır. Örneğin $d(1, (0, 1)) = d(1, [0, 1]) = 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $d(x, \mathbb{Q}) = 0$ olur.

Şu özellikler bariz olmalı:

• Eğer $x \in A$ ise, $d(x, A) = 0$.

• Eğer $A \subseteq B$ ise, $d(x, A) \geq d(x, B)$.

• Eğer $x \in A$ ise $d(x, A) = 0$.

• Ama bunun tersi yanlıştır. Öte yandan eğer A kapalı bir aralıksa,

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$

eşdeğerliliği geçerlidir.

• Eğer $a \in A$ ise,

$$d(x, A) \leq |x - a| \leq |x - y| + |y - a|$$

olduğundan

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|$$

olur. Demek ki

$$d(x, A) - |x - y| \leq \inf_{a \in A} |y - a| = d(y, A)$$

ve

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$$

olur. Simetriden dolayı aynı şekilde

$$d(y, A) - d(x, A) \le |x - y|$$

olur. Demek ki,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \le |x - y|$$

olur. Bu da

$$x \mapsto d(x, A)$$

kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir. Bu arada A'yı tek elemanlı bir küme alırsak, $a \in \mathbb{R}$ için,

$$x \mapsto |x - a|$$

kuralıyla tanınlanmış fonksiyonun da sürekli olduğunu görürüz. Gelecekte gerekecek bu sonuçları not edelim:

Önsav 42.4. *$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. x ile A arasındaki* ***mesafe***,

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\} = \inf_{a \in A} |x - a|$$

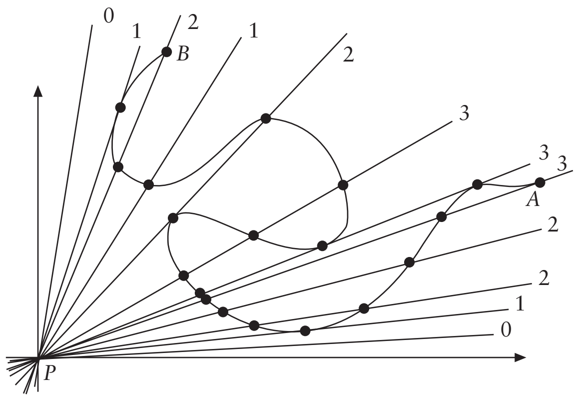
olarak tanımlansın. O zaman $x \mapsto d(x, A)$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyon süreklidir. Bunun özel bir durumu olarak, $a \in \mathbb{R}$ için,

$$x \mapsto |x - a|$$

kuralıyla tanınlanmış fonksiyon da süreklidir.

Doğal ama Süreksiz Bir Fonksiyon

Düzlemde güzel (yani sürekli!) bir eğri ve bir de bir P noktası alalım. P'den geçen doğrular eğriyi bazı noktalarda keser. $f(\alpha)$, yatay doğruyla α derecelik bir açı yapan doğrunun eğriyi kestiği nokta sayısı olsun. Örneğin, aşağıdaki resimdeki örnekte, $f(0) = f(90) = 0$. Doğrular P civarında yavaş yavaş döndüğünde, f sıçramalar yapar. Bu sıçramalar genellikle doğrunun eğriye teğet olduğu açılarda meydana gelir. Burada, doğal biçimde tanımlanmış ama sürekli olmayan bir fonksiyon sözkonusudur. Hülasa, her doğal fonksiyon sürekli olmak zorunda değildir.



Çeşit Çeşit Süreklilik

Verdiğimiz süreklilik tanımı Cauchy'nin olduğu için bazen sürekli yerine ***Cauchy-sürekli*** denir. Sürekliliğin başka adlarla anılan başka tanımları vardır; örneğin ***Heine-süreklilik***. Heine-sürekli bir fonksiyon yakınsak bir diziyi yakınsak bir diziye götürür. Bu iki kavram arasında bir fark olmadığını göreceğiz.

Kullanılan bir başka Cauchy sürekliliği kavramı daha vardır: Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine götüren bir fonksiyona da bazen ***Cauchy-sürekli*** denir. Eğer $X \neq \mathbb{R}$ ise, sürekli fonksiyonlar Cauchy-sürekli olmayabilirler. Örneğin Örnek 42.2'deki fonksiyon süreklidir ama Cauchy-sürekli değildir. Öte yandan $X = \mathbb{R}$ ise Cauchy-sürekli bir fonksiyon sürekli olmak zorundadır (Teorem 48.17).

42A. Tuhaf Bir Fonksiyonun Süreksizliği

Bu bölümde, $\mathbb{Q}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden, hiçbir noktada sürekli olmayan ama herhangi bir noktanın değerini 0'a değiştirirsek o noktada sürekli olan bir f fonksiyonunu ele alacağız. Bölümün sonunda bu tür fonksiyonlar inşa etmenin çok kolay bir yolunu göreceğiz.

Önce tuhaf bir fonksiyonun sürekliliğini tartışacağız. Sürekliliğini tartışacağımız tuhaf fonksiyon kesirli sayılar kümesinden gene kesirli sayılar kümesine gidecek. Tanım şöyle: $a \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman,

$$a = p/q$$

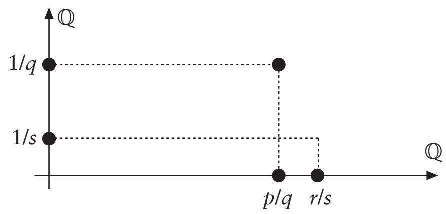
eşitliğini sağlayan birbirine asal bir p tamsayısı ve pozitif bir q doğal sayısı vardır. Bu p ve q sayıları biriciktir elbet, yani aynı a sayısı için bu koşulları sağlayan iki değişik p ve q çifti yoktur. Dolayısıyla $f(a)$'yı,

$$f(a) = 1/q$$

olarak tanımlayabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}
&f(0) = f(0/1) = 1/1 = 1,\\
&f(1) = f(2) = f(5) = 1\\
&f(-5) = f(-5/1) = 1/1 = 1,\\
&f(3/7) = f(2/7) = 1/7,\\
&f(-9/8) = 1/8.
\end{aligned}$$

İşte bu fonksiyonun sürekliliğini tartışacağız. Soracağımız soru şu: Bu fonksiyon hangi kesirli sayılarda süreklidir?



Tartışacağımız fonksiyon matematiğin klasik fonksiyonlarından olmadığı için, amacımız sadece ve sadece süreklilik kavramıyla daha içli dışlı olmamızı sağlamak.

Optimum yarar sağlamak için, okurun, yazıyı okumadan önce en az bir saat boyunca soru üzerine kafa yormasını, yani okurluktan düşünürlüğe terfi etmesini öneririz. Çok büyük bir olasılıkla konuyu yeni öğrenen okur yanıtı tahmin etmekte zorlanacaktır. Yanıtı (doğru!) tahmin ettikten sonra kanıt aşaması daha da zorlu geçecektir muhtemelen. Ama bu zorluğun yararları ilerde hissedilecektir.

Soruya üç değişik yöntemle yaklaşacağız. Birinci yöntemimiz oldukça ilkel olacak, herkesin aklına ilk gelen düşüncenin peşine düşeceğiz, doğrudan sürekliliğin tanımını uygulayacağız. İkinci yöntemimiz ise (çok değil) birazcık daha kavramsal olacak ve bu yaklaşım sayesinde sorunun yanıtını ve yanıtın kanıtını çok daha çabuk bulacağız. Birinci yöntem doğrudan elemanlara odaklaşacak, ikinci yöntem ise altkümelere. Elemanlara odaklaşarak sonucu tahmin etmek bile zor olacak. Oysa altkümelere odaklaşınca sonucu tahmin etmek ve tahmini kanıtlamak işten bile olmayacak. Böylece okurun ikinci yöntemin değerini göreceğini ve son birkaç sayıdır yaptıklarımızı ilk bakışta absürd denecek seviyede soyutlayacak olan topoloji konusunun erdemlerinin ayrımına varacağını umuyoruz.

Sorunun yanıtını iki değişik yöntemle bulduktan sonra, yazının en sonunda o ana kadar yaptığımız her şeyi çok çok basitleştiren bir olgu ortaya koyacağız. Böylece soyut matematiğin değerinin ortaya çıkacağını umuyoruz.

Birinci Yaklaşım

Yanıtı hemen vermeyip, birinci yöntemin doğallığını ve aynı zamanda zorluğunu göstermek için özellikle düşüne taşına, yavaş yavaş ilerleyeceğiz.

$a \in \mathbb{Q}$ olsun. f'nin a'da sürekli olup olmadığını anlamaya çalışıyoruz. $f(x) = f(-x)$ olduğundan, a yerine gerekirse $-a$'yı alarak a'nın negatif olmadığını varsayabiliriz [bkz. Bölüm 42, Alıştırma 5].

Bundan böyle, elli defa aynı şeyi tekrarlamamak için, r/s gibi bir ifade yazdığımızda, otomatik olarak r ve s'nin birbirine asal birer doğal sayı olduklarını varsayacağız; s elbette 0 olamaz.

a'yı p/q biçiminde yazalım. Demek ki

$$f(a) = 1/q.$$

f fonksiyonunun a'da sürekli olması için, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| < \delta \tag{1}$$

olduğunda, yani

$$\frac{p}{q} - \delta < \frac{r}{s} < \frac{p}{q} + \delta$$

olduğunda,

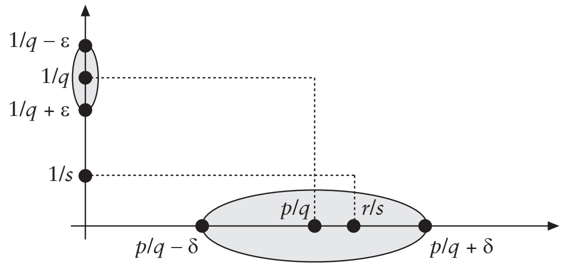
$$\left|\frac{1}{q} - \frac{1}{s}\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f\left(\frac{r}{s}\right)\right| < \varepsilon \tag{2}$$

olsun. Bu mümkün müdür? Her $\varepsilon > 0$ sayısı için böyle bir $\delta > 0$ sayısı bulabilir miyiz?

Pek kolay bir soru değil... Düşünelim...

Soru özetle şu: r/s, p/q'ye yakın olduğunda, $1/s$, $1/q$'ye yakın olmak zorunda mıdır?

Eğer r/s'nin s'sini istediğimiz kadar büyük (örneğin 1 milyar filan) alabilirsek (bu durumda, (1)'in sağlanması için r'nin de büyük ama s'ye asal alınması gerekir), o zaman $1/s$ çok küçük olur, 0'a çok yakın olur ve pozitif bir sabit sayı olan $1/q$'dan uzaklaşır... (Aşağıdaki şekle bakınız.)



Verilmiş bir p/q ve $\delta > 0$ için, $(p/q - \delta, p/q + \delta)$ aralığındaki r/s sayılarının (r ve s birbirine asal) paydalarının (s'lerin) üstsınırı var mıdır? Böyle bir üstsınır yoksa, s'yi çok büyük seçerek $1/s$'yi çok küçültebiliriz ve böylece $1/s$, $1/q$'dan uzaklaşır; yani f sürekli olmaz.

Evet galiba f sürekli değil, en azından sürekli olmama olasılığı yüksek gibi bir his belirdi.

Paydası belli bir n doğal sayısını geçmeyen kesirli sayılar kümesine bakalım. Bu kümeye A_n diyelim. A_n'nin elemanlarının paydalarında

$$1, 2, ..., n$$

sayılarından biri olabilir; ama paydada hangisi olursa olsun, payı ve paydayı gerekli sayıyla çarparak paydayı her zaman $n!$ sayısına eşitleyebiliriz. Yani

$$A_n \subseteq \frac{1}{n!}\mathbb{Z}.$$

olur. Dolayısıyla eğer bir kesirli sayıyı,

$$\frac{1}{n!}\mathbb{Z}$$

kümesinin dışında seçecek olursak, o zaman o sayı A_n'de olamaz, sayının paydası n'yi aşar ve f'nin o sayıdaki değeri $1/n$'den küçük olur. f'nin süreksizliğinin kanıtının anafikrini bulduk.

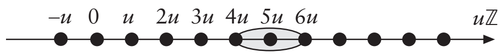
$u > 0$ için $u\mathbb{Z}$ biçiminde yazılan bir kümenin iki farklı elemanı arasındaki fark u'dan küçük olamaz elbet. Dolayısıyla eğer

$$a \in u\mathbb{Z}$$

ise,

$$(a - u, a + u) \cap u\mathbb{Z} = \{a\}$$

olmalı. Şekil aşağıda.



$a \in u\mathbb{Z}$ ise $(a - u, a + u)$ aralığında $u\mathbb{Z}$ kümesinden yegâne sayı a'dır.

Yukardaki paragrafta yazılanların özel bir durumunu irdeleyelim. $a = p/q$ eşitliğini anımsayalım. $n = 2q$ ve $u = 1/n!$ olsun. O zaman,

$$a = p/q \in A_q \subseteq A_n \subseteq u\mathbb{Z}$$

olduğundan,

$$(a - u, a + u) \cap u\mathbb{Z} = \{a\}$$

çıkar. Eğer $0 < v \leq u$ ise de

$$(a - v, a + v) \cap u\mathbb{Z} = \{a\}$$

çıkar. Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

Şimdi f'nin $a = p/q$ noktasında sürekli olmadığını kanıtlayabiliriz.

$$\varepsilon = \frac{1}{2q}$$

olsun. $\delta > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$v = \min\{u, \delta\} > 0$$

olsun. Herhangi bir

$$x \in (a - v, a + v) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{a\})$$

seçelim. $\mathbb{Q}$, yoğun bir sıralama olduğundan böyle bir x vardır. Elbette

$$|a - x| < v \leq \delta$$

olur. Öte yandan, yukarda bulduklarımızdan dolayı, $x \neq a$ sayısı $u\mathbb{Z}$ kümesinde olamaz, dolayısıyla $u\mathbb{Z}$'in bir altkümesi olan

A_n'de de olamaz. Sonuç: x'in paydası $n = 2q$'den büyük olmalı, yani

$$f(x) < \frac{1}{2q} = \frac{f(a)}{2} < f(a)$$

olmalı. Dolayısıyla

$$|f(a) - f(x)| = f(a) - f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} = \frac{1}{2q} = \varepsilon$$

olur. Demek ki f, a noktasında sürekli değilmiş.

Hatta sanki f'nin a'da sürekli olması için $f(a)$'nın 0'a eşit olması gerekirmiş gibi güçlü bir his belirmiş olmalı.

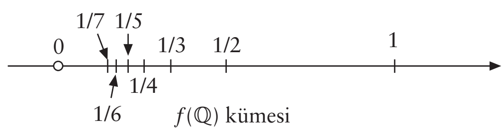
İkinci Yaklaşım

Yukardaki yaklaşımda elemanlarla biraz fazla haşır neşir olduk. Bu sefer elemanlar yerine kümeleri ön plana çıkaracağız.

f'nin görüntülerinin kümesine bakalım:

$$f(\mathbb{Q}) = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

$f(\mathbb{Q})$ kümesinin şekli hemen aşağıda.



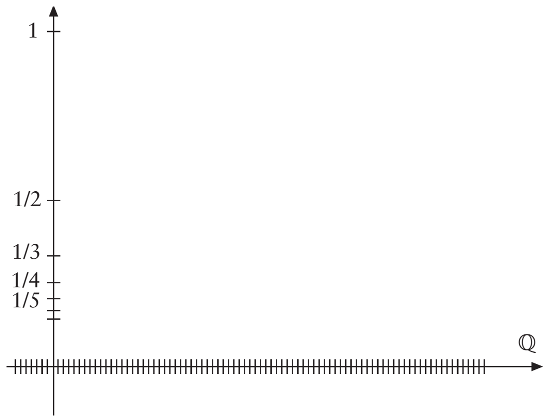
Bu küme ayrık bir kümedir, yani her $a \in \mathbb{Q}$ için,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap f(\mathbb{Q}) = \{a\}$$

eşitliğini sağlayan yeterince küçük (ama pozitif) bir ε vardır. (Burada ε, a'ya göre değişebilir.) Örneğin 1/3 ile 1/4 arasında kümenin bir başka elemanı yoktur. Genel olarak, $1/n$ ile $1/(n+1)$ sayıları arasında kümeden bir başka eleman yoktur.

Oysa tanım kümesi olan $\mathbb{Q}$, ayrık olmaktan oldukça uzak, tam tersine yoğun sıralamalı bir kümedir. Bunun bazı sonuçlarının olması gerekir.

Aşağıdaki şekil, f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini temsil ediyor. Tanım kümesi sık dokunmuş, değer kümesi ise ayrık bir küme.



Şimdi herhangi bir $a \in \mathbb{Q}$ alalım. $f(a)$ sayısı ayrık bir küme olan $f(\mathbb{Q})$'nün bir elemanı. Demek ki

$$(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \cap f(\mathbb{Q}) = \{f(a)\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\varepsilon > 0$ var. Eğer f sürekli olsaydı,

$$f((a - \delta, a + \delta)) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

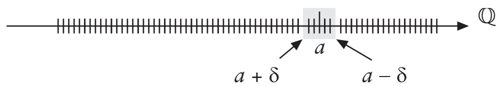
özelliğini sağlayan bir $\delta > 0$ olurdu. Yani,

$$f((a - \delta, a + \delta)) = \{f(a)\}$$

olurdu, yani f fonksiyonu, a merkezli bir açık aralıkta hep aynı değeri, $f(a)$ değerini alırdı ve bir sabit olurdu, bu aralıktaki kesirli sayıların paydaları hep aynı olurdu! Böyle bir şeyin imkânsız olduğu belli: Paydası n olan kesirli sayılar kümesi

$$\frac{1}{n}\mathbb{Z}$$

kümesinin bir altkümesidir ve bu son küme ayrık olduğundan (noktaları arasındaki mesafe $1/n$'den küçük olamaz), paydası n olan kesirli sayılar kümesi de ayrık bir kümedir ve boşküme dışında açık bir aralık içeremez.



Eğer f fonksiyonu a noktasında sürekli olsaydı, bir $\delta > 0$ için, $(a + \delta, a - \delta)$ aralığındaki kesirli sayıların paydaları hep aynı olurdu...

Demek ki f fonksiyonu a'da sürekli olamaz.

Yaklaşımların Karşılaştırılması

Aslında aralarında pek bir fark yok. Her iki yaklaşım da sürekliliğin tanımından yola çıkıyor. Ancak ikinci yaklaşımda elemanlardan çok altkümelere yoğunlaşıyoruz ve nerdeyse sihirli bir biçimde kanıt çok daha kolay oluyor.

İkinci yaklaşımın anafikri şu:

Teorem 42.A.1. *Eğer bir* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu a noktasında sürekliyse, o zaman* $f(a)$ *noktasını içeren her açık aralığın önimgesi a'yı içeren açık bir aralık içerir.*

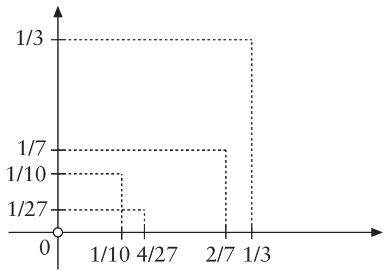
Daha genel bir teorem doğrudur.

Teorem 42.A.2. *Eğer bir* $f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $a \in X$ *noktasında sürekliyse, o zaman* $f(a)$ *noktasını içeren her açık aralığın önimgesi a'yı içeren açık bir aralığın X'le kesişimini içerir.*

Bu teoremin kolay kanıtını şimdilik okura bırakıyoruz. İlerde topoloji konusunu işlediğimizde bu ve benzer teoremleri dikkatlice kanıtlayacağız.

Yapay Bir Süreksizlik

Fonksiyon değerlerini hep (0, 1] aralığında alıyor ama ne sürekli artıyor ne de sürekli azalıyor. Oldukça kaotik bir yapıda



gibi görünüyor. Ama her $\varepsilon > 0$ için, fonksiyonun ε'dan büyük değer aldığı elemanlar oldukça ender, fonksiyonumuz genellikle çok küçük değerler alıyor.

f fonksiyonunun değer kümesine bir defa daha göz atalım:

$$f(\mathbb{Q}) = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}.$$

Her $n > 0$ doğal sayısı için, f'nin $1/n$'den büyükeşit değerler aldığı $x \in \mathbb{Q}$ sayılarının kümesine bakalım. Bu x sayıları, $0 < s \leq n$ ve $r \in \mathbb{Z}$ için, r/s biçiminde yazılırlar, bunlar da daha önce gördüğümüz gibi

$$\frac{1}{n!}\mathbb{Z}$$

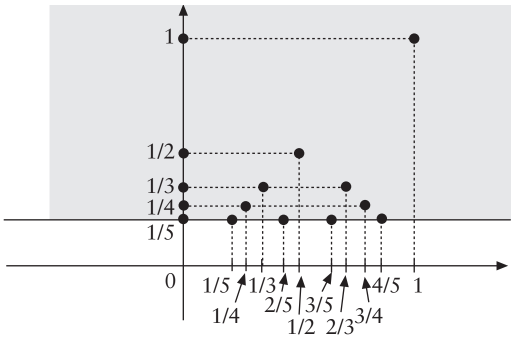
kümesinin elemanlarıdır, yani

$$\left\{x \in \mathbb{Q} :\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \subseteq \frac{1}{n!}\mathbb{Z}.$$

Örneğin, $n = 5$ ise, $f(x) \geq 1/5$ eşitsizliğini sağlayan $[0, 1)$ aralığındaki sayılar,

$$0,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3,\ 2/5,\ 1/2,\ 3/5,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5$$

sayılarıdır. $f(x) \geq 1/5$ eşitsizliğini sağlayan tüm sayılar ise bu sa-



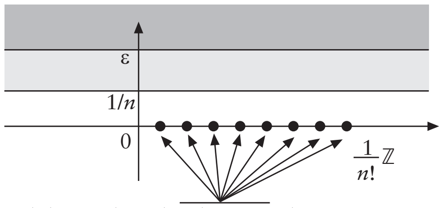
yılara bir tamsayı eklenerek elde edilir. Ama bizim asıl dikkat çekmek istediğimiz nokta, tüm bu sayıların,

$$\frac{1}{5!}\mathbb{Z}$$

kümesinde oldukları ve bu son kümenin elemanları arasında en az $1/5!$ kadar, oldukça küçük belki ama gene de sabit bir sayıdan büyük bir mesafenin olduğudur. Genel olarak, $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun,

$$\{x \in \mathbb{Q} : f(x) \geq \varepsilon\}$$

kümesinin değişik elemanları arasındaki mesafe belli bir $\delta > 0$ sayısının altına düşmüyor. Bunun doğru olduğunu görmek



Ancak bu sayıların bazılarının f değeri ε eşiğini aşabilir. Diğerlerinin f değeri ε'dan küçük olmak zorunda.

için n'yi $1/n \leq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak kadar büyük ve δ'yı pozitif ama $\delta < 1/n!$ eşitsizliğini sağlayacak kadar küçük seçmek yeterli.

Demek ki fonksiyonun değerlerinin çok büyük bir çoğunluğu çok küçük sayılar. Her $a \in \mathbb{Q}$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki,

$$0 < |x - a| < \delta$$

olduğunda,

$$|f(x) - 0| = f(x) < \varepsilon$$

olur. Nitekim, eğer $\varepsilon > 0$ verilmişse, δ'yı a'nın

$$\frac{1}{f(a)!}\mathbb{Z}$$

kümesinin elemanlarına olan uzaklıkların minimumumdan daha küçük seçmek yeterli. Bu da bize tam şunu söylüyor: Eğer f'nin a'daki değeri 0 olsaydı, o zaman f fonksiyonu a noktasında sürekli olurdu. Bir başka deyişle, f ile sadece a noktasında ayrışan

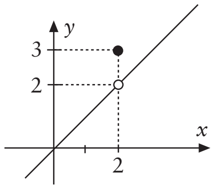
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \neq a \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = a \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu a'da süreklidir. Yani f fonksiyonunun a noktasındaki süreksizliği "tamir edilebilir" bir süreksizliktir. Bu noktada fonksiyonu 0 olarak tanımlamak yeterli.

Bu şuna benziyor:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } x \neq 2 \text{ ise} \\ 3 & \text{eğer } x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. *h*'nin grafiği şöyle:



Fonksiyon 2'de süreksiz, ama bu süreksizlik bu sadece bir şanssızlık gibi duruyor; *h*'nin 2'deki değerini 3'ten 2'ye değiştirirsek, fonksiyon her yerde sürekli olur.

Yukardaki f ile bu h arasındaki fark, *h*'nin sadece tek bir noktada süreksiz olması; oysa f her yerde süreksiz!

Alıştırma. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{Q}$ üzerinde f'ye eşit olsun, diğer noktalarda 0 olsun. k hangi noktalarda süreklidir?