Math 151 Final (1)

Ali Nesin
Ocak, 2005

1. $s > 0$ için aşağıdaki serinin yakınsayıp yakınsamadığına karar verin. (10 puan.)

$$\sigma(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{3n+1}{(4n+1)^s}$$

2. $s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots$ olsun. Seri yakınsadığı için s' in reel sayı olduğunu biliyoruz. Şimdi serinin terimlerini aşağıdaki gibi yeniden gruplandıralım:

$$(1/1 - 1/2 - 1/4) + (1/3 - 1/6 - 1/8) + (1/5 - 1/10 - 1/12) + \ldots$$

yani

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}\right).$$

şeklinde bir düzenleme yapalım.

s' i yeniden gruplandırarak elde ettiğimiz bu serinin $s/2$' ye yakınsadığını gösterin. (15 puan.)

3. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığına ya da ıraksaklığına karar verin. (25 puan.)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!(3n)!}{(4n)!} 9^n,$$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n}\right),$$

$$\sum_{n\geq 1} (n!)^{1/n},$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

4. Aşağıdaki serinin yakınsak olup olmadığına karar verin. (10 puan.)

$$\sigma(p,a) = \sum_{n\geq 1} n^p a^n \qquad , p \in \mathbb{Z} \text{ ve } a \in \mathbb{R}.$$

.

5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ ve $y_n > 0$ olsun . Ayrıca $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 1$ ise $\sum_{n\geq 1} x_n$ ve $\sum_{n\geq 1} y_n$ serilerinin ya ikisinin birden yakınsak ya da ikisinin birden ıraksak olduğunu gösterin. (20 puan.)

6. $\sum_{n\geq 1} x_n$ ve $\sum_{n\geq 1} y_n$ pozitif terimli yakınsak iki seri olsun. O zaman $\sum_{n\geq 1} x_n y_n$ serisinin de yakınsak olduğunu gösterin. (20 puan.)