Math 113 Analiz
Final, Haziran 2010
Ali Nesin

1. sin ve cos fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımıyla verilen tanımlarını kullanarak

$$\lim_{h\to 0}(\sin h)/h = 1 \text{ ve } \lim_{h\to 0}(1-\cos h)/h = 0$$

eşitliklerini gösterin.

(Uyarı: $(\sin h)/h$, $h = 0$ iken tanımlı değil, bu nedenle $(\sin h)/h$ ifadesinin kuvvet serisi açılımını 0'da değerlendiremezsiniz. Weierstrass M-testini kullanın.) [15 puan.]

2. $c \in X^\circ \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bir $M \in \mathbb{R}$ ve bir $\alpha > 0$ için $(c - \alpha, c + \alpha) \subseteq X$ ve her $x \in (c - \alpha, c + \alpha)$ için $|f(x) - f(c)| < M|x - c|$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu ***c noktasında Lipschitz koşulunu*** sağlar denir. Böyle bir f'nin c*'de* sürekli olduğunu gösterin. [4 puan.]

$c \in X^\circ \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'ye ***c noktasında türevlenebilir*** denir eğer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Limiti varsa ve bu durumda limit $f'(c)$ ile gösterilir. Böylelikle Y kümesi $f'(c)$' nin var olduğu c

sayılarının kümesi olmak üzere yeni bir $f' : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu elde edilir. f' fonksiyonuna f

fonksiyonunun türevi denir.

2. Sabit fonksiyonun türevlenebilir olduğunu gösterin ve türevini bulun. [2 puan.]

3. Birim fonksiyonun türevlenebilir olduğunu gösterin ve türevini bulun. [2 puan.]

4. $f(x) = |x|$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu noktaları bulun. Türevlenebilir noktalarda türevleri hesaplayın. [5 puan.]

5. $f(x) = x^{1/2}$ fonksiyonunun $c = 2$ noktasında türevini bulun. [7 puan.]

6. $\sin' x$, $\cos' x$ ve $\exp' x$ fonksiyonlarını bulun. [15 puan.]

7. c noktasında türevlenebilir bir fonksiyonun c noktasında *Lipschitz koşulunu* sağladığını gösterin. c noktasında türevlenebilir bir fonksiyonun yine c noktasında sürekli olduğunu sonucuna varın. [15 puan.]

8. $c \in X^\circ \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ c noktasında türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $f + g$ fonksiyonunun da c noktasında türevlenebilir olduğunu ve $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ eşitliğini gösterin. [5 puan.]

9. [Carathéodory Önsavı] $c \in X^\circ \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Gösterin ki f fonksiyonu c noktasında türevlenebilirdir ancak ve ancak her $x \in X$ *için* $f(x) - f(c) = (x - c)f_1(x)$ eşitliğini sağlayan bir $f_1 : X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Bu durumda $f'(c) = f_1(c)$ eşitliğinin sağlandığını gösterin. [15 puan.]

10. Soru 8' i Carathéodory Önsavını kullanarak gösterin. [5 puan.]

11. $c \in X^{\circ} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ c noktasında türevlenebilir iki fonksiyon olsun.. $f{\cdot}g$ fonksiyonunun da c noktasında türevlenebilir olduğunu ve $(f{\cdot}g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$ eşitliğini gösterin. [10 puan.]