

Bölüm 2

TEMEL TOPOLOJİ KAVRAMLARI

2.1 AÇIK KÜMELER

Tanım 2.1.1. X bir küme olsun ve bu kümenin bazı alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{T}$ ailesi verilsin. Eğer aşağıdaki üç aksiyom (belit) sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ ailesine X kümesi üzerinde bir *topolojik yapıdır*, ya da kısaca, $\mathcal{T}$ bir topolojidir denilir:

[T1] Boş küme ve X kümesi $\mathcal{T}$ ailesine aittir,

[T2] $\mathcal{T}$ ailesine ait her hangi iki kümenin arakesiti de $\mathcal{T}$ ailesine aittir,

[T3] $\mathcal{T}$ ailesinin her hangi bir alt ailesinin bileşimi de $\mathcal{T}$ ailesine aittir.

Bu üç özelliğe *topolojik yapı* aksiyomları (belitleri), diyeceğiz. [14],[25], [5], [17], [2], [23]

Tanım 2.1.2. $\mathcal{T}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturuyorsa $(X, \mathcal{T})$ sıralı çiftine bir *topolojik uzay* denilir.

X kümesi üzerindeki $\mathcal{T}$ topolojik yapısının başka birisiyle karışması kuşku yoksa, $(X, \mathcal{T})$ yerine, kısaca, X topolojik uzayı diyeceğiz.

Tanım 2.1.3. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ise, $\mathcal{T}$ ailesine ait kümelere bu *topolojik uzayın açık kümeleri* denir.

Bir X kümesi üzerinde aynı zamanda birden çok topolojik yapı düşünülebilir. Bu durumlarda, başka bir topolojiye ait açık kümelerle karıştırmamak için, bir $\mathcal{T}$ topolojisine ait açık kümeleri $\mathcal{T}$ -açık kümeler diye belirleyebiliriz.

Örnek 2.1.1. X her hangi bir küme olsun, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ailesi X üzerinde bir topolojik yapı oluşturur. Bu durumda $\mathcal{T}$ topolojisine *ayrık olmayan topoloji* denilir.

Örnek 2.1.2. Bir X kümesinin $\mathcal{P}$ kuvvet kümesi, yani X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan aile, X üzerinde bir topolojik yapı oluşturur. Bu topolojiye X üzerindeki *ayrık topoloji* denilir.

Örnek 2.1.3. Üç ögeli bir $X = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor.

1. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$
2. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{c, b\}, X\}$
3. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

aileleri X kümesi üzerinde birer topolojik yapıdır.

Örnek 2.1.4. X her hangi bir küme olsun. Bir $\mathcal{T}$ ailesi boş küme ile tümleyenleri sonlu olan bütün alt kümelerden oluşsun; yani

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : A = \emptyset \text{ ya da } A' \text{ sonludur}\}$$

olsun. Böyle tanımlanan $\mathcal{T}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir. Buna X kümesi üzerindeki *sonlu tümleyenler topolojisi* diyeceğiz.

Gerçekten bu ailenin bir topoloji olduğunu göstermek kolaydır. Bunun için Tanım 2.1.1 ile verilen üç aksiyomun sağlandığını göstermeliyiz.

[T1]: $\emptyset \in \mathcal{T}$ olduğu veriliyor. Öte yandan $X' = \emptyset$ dir ve boş küme sonludur; çünkü nicelik sayısı sıfırdır. Öyleyse, tanımdan $X \in \mathcal{T}$ çıkar.

[T2]: $A \in \mathcal{T}$ ve $B \in \mathcal{T}$ verilsin. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $A \cap B \in \mathcal{T}$ olur. Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olacaktır. Bu iki küme $\mathcal{T}$ ailesine ait olduklarından A' ile B' tümleyenleri sonludur. Öyleyse

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

kümesi de sonlu olacaktır, ki bu $(A \cap B) \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

[T3] : Bir $\{A_i : i \in I, A_i \in \mathcal{T}\}$ ailesi verilsin. Eğer

$$\cup\{A_i : i \in I\} = \emptyset$$

ise, tanımdan, bu bileşim $\mathcal{T}$ ailesine ait olacaktır. Eğer

$$\cup\{A_i : i \in I\} \neq \emptyset$$

ise, en az öyle bir $j \in I$ damgası vardır ki $A_j \neq \emptyset$ dir. Bu durumda A_j sonlu bir kümedir ve

$$(\cup A_i)' \subset A_j'$$

sağlanır. Demek ki, verilen ailenin bileşiminin tümleyeni sonludur. Öyleyse

$$(\cup A_i) \in \mathcal{T}$$

olacaktır.

Tanım 2.1.4. Bir A kümesi ile bir $\mathcal{A} = \{G_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer A kümesi $\mathcal{A}$ ailesinin bileşimi tarafından kapsanıyorsa, yani

$$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i \quad (2.1)$$

oluyorsa, $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir örtüsüdür, denilir.

- (i) Verilen örtüye ait kümeler sayılabilir tane ise, bu örtüye *sayılabilir bir örtü*,
- (ii) Verilen örtüye ait kümeler sonlu tane ise, bu örtüye *sonlu bir örtü*,
- (iii) Verilen örtüye ait kümelerin her birisi açık bir küme ise, bu örtüye *açık bir örtü*, denilir.
- (iv) Eğer bir $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ alt ailesi de A kümesini örtüyorsa $\mathcal{D}$ alt ailesine bir *alt örtüdür*, denilir.

Tanım 2.1.5. $(X, \mathcal{T})$ ile $(Y, \mathcal{S})$ iki topolojik uzay olsun ve bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer

- (i) f fonksiyonu bire-bir ve örten (BBÖ);
- (ii) f altında $\mathcal{T}$ yapısı $\mathcal{S}$ yapısı üzerine resmediliyor;

ise f fonksiyonuna X den Y ye bir *topolojik eşyapı dönüşümüdür*, denilir.

İki topolojik uzay arasında bir topolojik eşyapı resmi varsa, bu iki uzaya topolojik *eşyapılı uzaylar*, diyeceğiz.

Bir X kümesi üzerinde grup, halka, cisim gibi cebirsel yapılar, ölçüm yapıları, topolojik yapılar gibi farklı matematiksel yapılar kurulabilir. Belli bir anda, yalnızca topolojik yapılar ile ilgileniyor ve X kümesi üzerinde başka yapılar düşünmüyorsak, "topolojik eşyapılı" deyimi yerine, kısaca, "*eşyapılı*" deyimini kullanabiliriz.

Yukarıdaki tanımda (ii) nin anlamı şudur: f fonksiyonu $\mathcal{T}$ topolojisine ait açık kümeleri $\mathcal{S}$ topolojisine ait açık kümeler üzerine resmeder. Buna göre şu önermeyi söyleyebiliriz:

Önerme 2.1.1. $(X, \mathcal{T})$ ile $(Y, \mathcal{S})$ topolojik uzayları verilsin. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi (topolojik eşyapı dönüşümü) olması için aşağıdaki üç koşul gerekli ve yeterlidir:

1. f fonksiyonu bire-bir ve örten (BBÖ) olmalıdır,
2. Her $T \in \mathcal{T}$ için $f(T) \in \mathcal{S}$ olmalıdır,
3. Her $S \in \mathcal{S}$ için $f(T) = S$ olacak biçimde bir $T \in \mathcal{T}$ varolmalıdır; bu koşul, her $S \in \mathcal{S}$ için $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}$ olmasına denktir.

Uyarı 2.1.1. Bir topolojik uzayda açık kümelerin keyfi bir topluluğunun arakesiti açık bir küme olmayabilir.

Bunu bir örnekle gösterebiliriz: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine $\mathcal{T}$ diyelim. Her n doğal sayısına karşılık

$$A_n = \mathbb{R} - \{n\} = \{n\}'$$

kümesini tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{T}$ olduğu apaçıktır. Öte yandan

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N}$$

dir. Doğal sayıların tümleyen kümesi sonlu bir küme olmadığına göre

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{T}$$

olacaktır.

2.1.1 PROBLEMLER

1. Bir, iki, üç ögeli kümeler üzerinde kurulabilecek bütün topolojik yapıları kurunuz.
2. Boş olmayan bir X kümesi ile bir $a \in X$ ögesi verilsin. Boş küme ile a ögesini içeren bütün alt kümelerin; yani

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : (A = \emptyset) \vee (a \in A)\}$$

ailesinin X kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

3. Her hangi bir X kümesi üzerinde boş küme ile tümleyenleri sayılabilir olan kümeler ailesinin; yani

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : (A = \emptyset) \vee (A' \text{ sayılabilir})\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

4. $X = [0, 1) = \{x : 0 \leq x < 1\}$ aralığı üzerinde boş küme ile $[0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$, biçimindeki yarı-açık aralıklar ailesinin; yani

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, [0, \alpha) : 0 < \alpha \leq 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

5. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde $\mathbb{R}$, boş küme ve $[\beta, \infty), \beta \in \mathbb{R}$, biçimindeki yarı-açık aralıklardan oluşan ailenin; yani

$$\mathcal{T} = \{A : (A = \mathbb{R}) \vee (A = \emptyset) \vee (A = [\beta, \infty)), \beta \in \mathbb{R}\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

6. Örnek 2.1.3 'te kurulan $\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ topolojilerinin arakesitinin; yani her iki topolojide de var olan kümelerden oluşan ailenin yeni bir topoloji olduğunu gösteriniz. Karşıt olarak, $\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ topolojilerinin bileşiminin; yani iki topolojiden herhangi birisine veya her ikisine de ait olan bütün kümelerden oluşan ailenin yeni bir topoloji oluşturmadığını gösteriniz. Aşağıdaki problemler bunu genelleştirecektir.

7. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ bir X kümesi üzerinde birer topolojik yapı iseler

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{H : (H \in \mathcal{T}) \wedge (H \in \mathcal{S})\} \quad (2.2)$$

ailesinin de X üzerinde bir topolojik yapı olduğunu gösteriniz.

8. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ bir X kümesi üzerinde birer topolojik yapı iseler

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{S} = \{H : (H \in \mathcal{T}) \vee (H \in \mathcal{S})\} \quad (2.3)$$

ailesinin X üzerinde bir topolojik yapı oluşturmadığını gösteriniz.

9. Bir X kümesi üzerindeki kimi topolojilerden oluşan bir $\mathcal{T}_i : i \in I$ topolojik yapılar ailesi verilsin.

$$\mathcal{L} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i = \{T : (\forall i \in I) T \in \mathcal{T}_i\}$$

arakesitinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz. (İleride bu topolojiye, verilen *topolojilerin en büyük alt sınırı* diyeceğiz.)

10. **Tanım 2.1.1** ile verilen [T1] aksiyomunun [T2] ile [T3] aksiyomlarından bağımsız olmadığını; yani ilk aksiyomun son ikisinden çıkarılabileceğini gösteriniz. (Yol gösterme: Boş ailenin arakesiti evrensel kümedir, bileşimi ise boş kümedir. (Bkz. [13].))

2.2 KAPALI KÜMELER

Tanım 2.2.1. Bir topolojik uzayda açık kümelerin tümleyen kümelerine *kapalı kümeler*, denilir.

Bir küme üzerinde birden çok topolojik yapı aynı zamanda düşünülüyorsa, bir kümenin belli bir $\mathcal{T}$ topolojisine göre kapalı olduğunu belirtmek için, bu kümeye *$\mathcal{T}$ -kapalı bir kümedir*, diyeceğiz.

Uyarı 2.2.1. (X, τ) topoloji uzayındaki kapalı kümeler τ topolojisine ait kümelerin tümleyenleridir. Bazen, kısalığı sağlamak için, topoloji uzayındaki bütün kapalı kümelerin ailesini τ' simgesiyle göstereceğiz. Buna göre;

$$K \text{ kapalıdır} \Leftrightarrow K \in \tau'$$

Tabii, bunun tersi de yapılabilir. $\mathcal{K}$ ailesi kapalı kümelerden oluşan bir aile ise, aileye ait kümelerin tümleyenlerinin oluşturduğu açık kümeler ailesini $\mathcal{K}'$ simgesiyle göstereceğiz. Tabii, bir topolojik uzayın her alt kümesinin ya açık ya da kapalı olması gerekmez. Ne açık ne de kapalı olan alt kümeler de varolabilir.

Önerme 2.2.1. *Bir topolojik yapının açık kümelerini belirleyen $[T1]$, $[T2]$, $[T3]$ aksiyomları aşağıdaki aksiyomlara eşdeğer olur:*

1. $[F1]$ Evrensel küme ile boş küme kapalıdır,
2. $[F2]$ Kapalı kümelerin her sonlu sayıdasının bileşimi kapalıdır,
3. $[F3]$ Kapalı kümelerden oluşan her ailenin arakesiti kapalıdır.

Bu önermenin kanıtı Eşleklik İlkesinden (bkz. [13]) hemen çıkar. Bir topolojik yapıyı belirlemek için, **Tanım 2.1.1** ile o yapının açık kümelerini belirlemek yeterlidir. Yukarıdaki denkliği düşünürsek, bir topolojik yapıyı belirlemek için, o yapının kapalı kümelerini belirlemenin de yeterli olacağı apaçıktır. Çünkü, topolojik uzayın açık kümeleri, kapalı kümelerinin tümleyenleri olarak bulunabilecektir.

Tanım 2.2.2. Bir topolojik uzayda bir A kümesinin bir örtüsüne ait her öge kapalı bir küme ise, bu örtüye A kümesinin *kapalı bir örtüsüdür*, denilir.

2.1.1 Önermeye eşdeğer olarak, eşyapı dönüşümlerini aşağıdaki önermeyle belirleyebiliriz:

Önerme 2.2.2. $(X, \mathcal{T})$ ile $(Y, \mathcal{S})$ topolojik uzayları verilsin. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun bir topolojik eşyapı dönüşümü olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar şunlardır:

1. f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.
2. f fonksiyonu kapalı kümeleri kapalı kümelere resmeder (dönüştürür).
3. f^{-1} fonksiyonu kapalı kümeleri kapalı kümelere resmeder.

2.2.1 PROBLEMLER

1. Bir topolojik uzayda kapalı kümelerden oluşan bir ailenin bileşiminin kapalı bir küme olmayabileceğini, bir örnek ile gösteriniz.
2. **Örnek 2.1.3** ile verilen üç topolojiye ait kapalı kümeleri ayrı ayrı saptayınız.
3. Ayrık bir topolojik uzayın kapalı kümelerini belirleyiniz.

4. Sonlu bir küme üzerinde tanımlı bir topolojiye göre, tek öğeli her küme kapalı bir alt küme oluyorsa, gösteriniz ki bu topoloji ayrık topolojidir.
5. Bir topolojik uzayda açık bir A kümesi ile kapalı bir K kümesi veriliyor. Gösteriniz ki
 - (i) $A - K$ kümesi açıktır;
 - (ii) $K - A$ kümesi kapalıdır.

2.3 İÇ, DIŞ, KENAR NOKTALARI

Tanım 2.3.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $x \in T \subset A$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T}$ varsa, x noktası A kümesinin bir *iç noktasıdır*, denilir.

Eğer $\mathcal{T}$ topolojisinin başkasıyla karışması tehlikesi varsa, *iç nokta* yerine $\mathcal{T}$ -*iç nokta* diyeceğiz, ki bu $\mathcal{T}$ topolojisine göre A kümesinin iç-noktası anlamına gelir.

Tanım 2.3.2. Bir topolojik uzayda bir A alt kümesi verilsin. A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin *içlemi* (*içi*) diyecek ve bunu A° simgesiyle göstereceğiz.

Önerme 2.3.1. Bir topolojik uzayda bir A alt kümesi verilsin. Bu durumda,

- (a) A° kümesi A kümesinin bütün açık alt kümelerinin bileşimine eşittir; dolayısıyla $A^\circ \subset A$ dır.
- (b) A° kümesi açıktır,
- (c) A° kümesi A nın en büyük açık alt kümesidir,
- (d) A kümesinin açık olması için $A = A^\circ$ olması gerekli ve yeterlidir.

İSPAT:

(a:)

$$G = \cup\{T : T \subset A, \quad T \in \mathcal{T}\} \quad (2.4)$$

kümesini tanımlayalım. $A^\circ = G$ olduğunu göstermek istiyoruz. $x \in A^\circ$ ise, x bir iç-noktadır. İç-nokta tanımı gereğince, $x \in T \subset A$ olacak

şekilde bir $T \in \mathcal{T}$ vardır. Öyleyse, x ögesi (2.4) eşitliğinin sağ yanına aittir. Dolayısıyla, $x \in G$ olacaktır; yani $A^\circ \subset G$ dir. Tersine olarak, $y \in G$ ise, (2.4) eşitliğinden $y \in T \subset A$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T}$ varolacaktır, ki bu, iç-nokta tanımı gereğince, $y \in A^\circ$ olması demektir; yani $G \subset A^\circ$ dır. Böylece $A^\circ = G$ çıkar. $A^\circ \subset A$ olduğu (2.4) dan görülmektedir.

- (b:) $A^\circ = G$ nin açık olduğu (2.4) ile [T3] aksiyomundan hemen çıkar.
- (c:) (2.4) gereğince, A nın bütün açık alt kümeleri $A^\circ = G$ nin birer alt kümesidir; dolayısıyla istenen şey (b:) den çıkar.
- (d:) A kümesi açıksa, yani $A \in \mathcal{T}$ ise, (2.4) den $A \subset G = A^\circ$ olur. $A^\circ \subset A$ olduğu da düşünülürse, $A \subset A^\circ \subset A$ kapsamından $A = A^\circ$ elde edilir. Tersine olarak $A = A^\circ$ ise, (b:) den, A kümesinin açık olduğu apaçıktır.

Tanım 2.3.3. Bir topolojik uzayda bir A alt kümesi verilsin. A nın A' tümleyen kümesinin bir iç-noktasına, A kümesinin bir *dış noktasıdır*, denilir.

A kümesinin bütün dış noktalarının oluşturduğu kümeye A nın dışı diyecek ve bunu $\text{dış}(A)$ simgesiyle göstereceğiz. Kısaca söylersek, $\text{dış}(A) = (A')^0$ dır.

Tanım 2.3.4. Bir nokta bir A kümesinin ne iç ve ne de dış noktası ise, bu noktaya A kümesinin bir *kenar noktasıdır*, denilir.

A kümesinin bütün kenar noktalarından oluşan kümeye A kümesinin *kenarı* diyecek ve bunu ∂A simgesiyle göstereceğiz.

Önerme 2.3.2. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun ve $A, B \subset X$ alt kümeleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

dir.

İSPAT: $x \in (A \cap B)^\circ$ ise, iç-nokta tanımı gereğince, $x \in T \subset A \cap B$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T}$ vardır, ki bu $x \in T \subset A$ ve $x \in T \subset B$ demek olacağından $x \in A^\circ \cap B^\circ$ çıkar.

Tersine olarak, $x \in A^\circ \cap B^\circ$ ise $x \in T_1 \subset A$ ve $x \in T_2 \subset B$ olacak şekilde $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ vardır.

$$x \in T_1 \cap T_2 \subset A \cap B$$

ve

$$T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$$

olduğu düşünülürse, iç-nokta tanımı gereğince, $x \in (A \cap B)^\circ$ çıkar.

2.3.1 PROBLEMLER

1. Bir topolojik uzayda A açık bir küme B her hangi bir küme olsun. Eğer $A \subset B^\circ$ ise $A \subset B$ olacağını gösteriniz.
2. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında A her hangi bir küme ve K kapalı bir küme olsun. Eğer $A \cup K = X$ ise $A^\circ \cup K = X$ olacağını gösteriniz.
3. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay $A, B \subset X$ olsun. Aşağıdaki özelliklerin sağlandığını gösteriniz.
 - (a) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ dir.
 - (b) $\partial(A^\circ) \subset \partial A$
 - (c) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$
 - (d) $\text{dış}(A \cup B) = \text{dış}(A) \cap \text{dış}(B)$
 - (e) $A^\circ = A - (A \cap \partial A)$
 - (f) $\partial A \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$ dur.
 - (g) $\partial A \subset A \Leftrightarrow A$ kapalıdır.
4. Her kümenin kenar kümesi kapalıdır. Gösteriniz.
5. Kapalı bir küme iç noktaları ile kenar noktalarının bileşimine eşittir. Gösteriniz.
6. Bir kümenin hem açık hem kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul hiçbir kenar noktasının olmamasıdır. İspatlayınız.

2.4 YIĞILMA NOKTALARI

Tanım 2.4.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir $x \in X$ noktasını içeren her T açık kümesi A nın x den farklı en az bir noktasını daha içeriyorsa, yani

$$x \in T \in \mathcal{T} \Rightarrow (T - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad (2.5)$$

oluyorsa, x noktasına A kümesinin bir *yığılma noktasıdır* denilir.

A nın bütün yığılma noktalarının oluşturduğu kümeye, A dan *türemiş küme* diyecek ve bunu $\tilde{A}$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.4.1. $A \subset N$ ise $\tilde{A} \subset \tilde{N}$ dir.

İSPAT: $x \in \tilde{A}$ ise (2.4.1) sağlanıyor demektir. $A \subset N$ olduğundan, 2.4.1 de A yerine N yazılırsa bağıntı bozulmaz.

Önerme 2.4.2. $A \cup \tilde{A}$ kapalıdır.

İSPAT: $(A \cup \tilde{A})'$ nın açık olduğunu göstereceğiz. Bunun için, Önerme 2.3.1 (d) gereğince,

$$(A \cup \tilde{A})' = [(A \cup \tilde{A})']^o$$

olduğunu göstermeliyiz. $x \in (A \cup \tilde{A})'$ ise, $\tilde{A}$ nın tanımını gereğince, öyle bir T açık kümesi vardır ki $x \in T$ ve

$$(T - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

olur. Ayrıca her $t \in T$ için $(T - \{t\}) \cap A = \emptyset$ olduğundan, T ye ait noktaların hiç birisi A nın *yığılma noktası* olamaz; yani $T \subset (A \cup \tilde{A})'$ dür. O halde x noktası $(A \cup \tilde{A})'$ nün bir iç-noktasıdır, ki bu

$$(A \cup \tilde{A})' \subset [(A \cup \tilde{A})']^o$$

olması demektir. Bu kapsamanın tersi Önerme 2.3.1 (a) gereğince biliniyor.

Önerme 2.4.3. A nın kapalı olması için $\tilde{A} \subset A$ olması gerekli ve yeterlidir.

İSPAT: A kapalı olsun. A' açıktır ve her $x \in A'$ için $(A' - \{x\}) \cap A = \emptyset$ olduğundan, A' nün hiç bir ögesi A nın yığılma noktası olamaz. Şu halde A nın bütün yığılma noktaları A nın içindedir; yani $\tilde{A} \subset A$ dır.

Tersine olarak $\tilde{A} \subset A$ olsun. A' nün açık olduğunu, yani $(A')^o = A'$ olduğunu göstermek yetecektir. Gerçekten $y \in A'$ ise, $\tilde{A} \subset A$ dan $y \notin \tilde{A}$ çıkar. A nın tanımını gereğince öyle bir T açık kümesi vardır ki $y \in T$ ve $(T - \{y\}) \cap A = \emptyset$ olur. Bu, $T \subset A'$ demektir. Şu halde $y \in (A')^o$ dür; yani $(A')^o = A'$ dür.

Önerme 2.4.4. $(A \cup N)^\sim = \tilde{A} \cup \tilde{N}$ dir.

İSPAT: **Önerme 2.4.1** gereğince, $A \subset A \cup N$ den $\tilde{A} \subset (A \cup N)^\sim$ ve $N \subset A \cup N$ den $\tilde{N} \subset (A \cup N)^\sim$ çıkar ki, bu ikisinden, $\tilde{A} \cup \tilde{N} \subset (A \cup N)^\sim$ olur.

Ters kapsamayı göstermek için $x \notin \tilde{A} \cup \tilde{N}$ ise $x \notin (A \cup N)^\sim$ olduğunu göstermek yetecektir. Gerçekten $x \notin \tilde{A}$ ve $x \notin \tilde{N}$ ise, sırasıyla, x noktasını içeren öyle T, H açık kümeleri vardır ki

$$(T - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

$$(H - \{x\}) \cap N = \emptyset$$

olur. Bu durumda

$$(T \cap H - \{x\}) \cap (A \cup N) = \emptyset$$

olduğundan $x \in (A \cup N)^\sim$ çıkar. O halde $(A \cup N)^\sim \subset \tilde{A} \cup \tilde{N}$ dir.

Tanım 2.4.2. Eğer A kümesine ait bir x ögesi bu kümenin bir yığılma noktası değilse; yani $x \in A$ ve $x \notin \tilde{A}$ ise; x ögesine A kümesinin *tekil (izole)* bir noktasıdır denilir.

Tanım 2.4.3. Hiç bir ayrık noktası olmayan kapalı bir kümeye *mükemmel* bir kümedir, denilir.

2.4.1 PROBLEMLER

1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay $A, B, K \subset X$ olduğuna göre aşağıdaki özelliklerin varlığını gösteriniz.

$$(a) (A \cap B)^\sim \subset \tilde{A} \cap \tilde{B} \text{ dır,}$$

$$(b) A \subset K \text{ ve } K \text{ kapalı ise } \tilde{A} \subset K \text{ dır.}$$

2. Ayrık bir topolojik uzayda hiçbir alt-kümenin hiçbir yığılma noktası yoktur. Neden? Ayrık olmayan bir uzayda bu özellik nasıldır?
3. Kapalı bir küme kendisinin yığılma noktaları ile ayrık noktalarının birleşimine eşittir. Gösteriniz.
4. Bir $x \in A$ ögesinin A kümesinin bir ayrık noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $A \cap T = \{x\}$ olacak şekilde açık bir T kümesinin varlığıdır. Gösteriniz.

5. $A = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesinin $\tilde{A} = [a, b]$ kapalı aralığı olduğunu gösteriniz.
6. $B = (a, b) = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesinin $\tilde{B} = [a, b]$ kapalı aralığı olduğunu gösteriniz.
7. $A = \mathbb{N}$ kümesinin hiç yığılma noktası olmadığını gösteriniz.
8. $S = \{k - \frac{1}{n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesinin $\tilde{S} = \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.
9. $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin tek yığılma noktasının $\tilde{D} = \{0\}$ olduğunu gösteriniz.

2.5 KAPLAMA

Tanım 2.5.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın bütün kapalı üst-kümelerinin ailesini $\mathcal{K}_A$ ile gösterelim; yani

$$\mathcal{K}_A = \{K : A \subset K \subset X, \quad K \text{ kapalı}\} \quad (2.6)$$

olsun.

$$\bar{A} = \bigcap \{K | K \in \mathcal{K}_A\} \quad (2.7)$$

kümesine A kümesinin *kaplamı* denilir.

İngilizce *closure* karşılığı olan *kaplam* yerine *kapanış* terimi de kullanılır.

Önerme 2.5.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (a) $\bar{A}$ kümesi kapalıdır;
- (b) $A \subset \bar{A}$ dır;
- (c) $\bar{A}$ kümesi A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir; yani A kümesini kapsayan her kapalı K kümesi için $A \subset \bar{A} \subset K$ olur;
- (d) A kümesinin kapalı olması için $A = \bar{A}$ olması gerekli ve yeterlidir.

İSPAT:

- (a) A kümesi kapalı kümelerin arakesiti olduğundan kapalıdır, (bkz. [F3] aksiyomu).
- (b) ve (c) (2.6) ve (2.7) den hemen görülür.
- (d) $A = \bar{A}$ ise, (a) gereğince, A kapalıdır. Tersine olarak A kapalı ise, (c) gereğince, $\bar{A} \subset A$ olacaktır. Oysa (b) gereğince $A \subset \bar{A}$ dır. O halde $A = \bar{A}$ olur.

Önerme 2.5.2. $\bar{A} = \tilde{A} \cup A$ dır.

İSPAT: Önerme 2.4.2 gereğince $\tilde{A} \cup A$ kümesi A yı kapsayan kapalı bir kümedir. O halde, (2.7) den, $\bar{A} \subset A \cup \tilde{A}$ çıkar.

Öte yandan $A \subset \bar{A}$ ile Önerme 2.4.1 ve Önerme 2.4.3 gereğince, $\tilde{A} \subset \bar{A} = \bar{A}$ olacaktır. Öyleyse $A \cup \tilde{A} \subset \bar{A}$ olur.

Teorem 2.5.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve A ile B , X uzayının her hangi iki alt-kümesi olmak üzere, Kuratowski kaplama aksiyomları diyeceğimiz aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. [W1] $\bar{\emptyset} = \emptyset$
2. [W2] $A \subset \bar{A}$
3. [W3] $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
4. [W4] $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

İSPAT: $\emptyset$ ve $\bar{A}$ nm kapalı olduğu düşünülürse, [W1] ve [W4] özellikleri, ÖNERME 2.5.1 (d) den çıkar. [W2] ise Önerme 2.5.1 (b) de gösterildi. [W3] özeliğini aşağıdaki eşitlikten görebiliriz:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} &= (A \cup B) \cup (A \cup B)^\sim \\ &= (A \cup B) \cup (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \\ &= (A \cup \tilde{A}) \cup (B \cup \tilde{B}) \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

Tanım 2.5.2. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. Eğer $x \in \bar{A}$ ise, x noktasına A kümesinin bir *kaplama noktasıdır*, denilir.

Önerme 2.5.3. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bir $x \in X$ ögesinin A kümesinin bir kaplama noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasını içeren her açık kümenin A ile kesişmesidir.

İSPAT: Önerme 2.5.2 ile TANIM 2.4.1 den

$$\begin{aligned}
 x \in \bar{A} &\Leftrightarrow x \in A \cup \tilde{A} \\
 &\Leftrightarrow (x \in \tilde{A}) \vee (x \in A) \\
 &\Leftrightarrow [x \in T \in \mathcal{T} \Rightarrow (T - \{x\}) \cap A \neq \emptyset] \vee \\
 &\quad [x \in T \in \mathcal{T} \Rightarrow (T \cap A \neq \emptyset)] \\
 &\Leftrightarrow [x \in T \in \mathcal{T} \Rightarrow (T \cap A \neq \emptyset)]
 \end{aligned}$$

çıkar ki bu istenen şeydir.

Önerme 2.5.4. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A \in \mathcal{T}$ ise her $B \subset X$ alt kümesi için

$$A \cap \bar{B} \subset \overline{(A \cap B)}$$

dir.

İSPAT: $x \in A \cap \bar{B}$ ise x noktasını içeren her $T \in \mathcal{T}$ için $x \in T \cap A \in \mathcal{T}$ olacağından $T \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ çıkar, ki bu $x \in \overline{(A \cap B)}$ demektir.

Tanım 2.5.3. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Eğer $B \subset \bar{A}$ ise, A kümesi B içinde *yoğundur*, denilir. Özel olarak $\bar{A} = X$ ise, A kümesine X uzayının yoğun bir alt-kümesidir, diyeceğiz.

Önerme 2.5.5. A kümesinin X uzayı içinde yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul boş olmayan her T açık kümesi için $T \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

İSPAT: A kümesi X içinde yoğun ve $T \neq \emptyset$ açık bir küme olsun. T boş olmadığına göre bir $x \in T$ noktası vardır ve $x \in \bar{A} = X$ olduğundan, Önerme 2.5.3 gereğince $T \cap A \neq \emptyset$ olacaktır.

Tersine olarak, $x \in X$ noktasını kapsayan her T açık kümesi için $T \cap A \neq \emptyset$ ise, Önerme 2.5.3 gereğince, $x \in \bar{A}$ olacaktır; yani $X \subset \bar{A}$ dır.

Tanım 2.5.4. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir A alt kümesi verilsin. Eğer $\bar{A}$ kümesinin hiç bir iç noktası yoksa; yani $(\bar{A})^\circ = \emptyset$ ise; A kümesine X uzayının *hiçbir yerinde yoğun değildir*, denilir.

Tanım 2.5.5. Bir topolojik uzayın sayılabilir yoğun bir alt-kümesi varsa, bu uzaya *ayrılabilir* bir uzaydır, denilir.

2.5.1 PROBLEMLER

1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olduğuna göre aşağıdaki özelliklerin varlığını gösteriniz:
 - (a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
 - (b) $(\bar{A})' = (A')^o$ ve $(A^o)' = (A')^-$
 - (c) $\bar{A} = A^o \cup \partial A$
 - (d) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$
 - (e) $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap (A')^-$
 - (f) $\partial A = \bar{A} - A^o = \bar{A} \cap (A')^-$
 - (g) $A \subset B \Rightarrow (\bar{A})^o \subset (\bar{B})^o$
 - (h) $A \subset B \Rightarrow (A^o)^- \subset (B^o)^-$
 - (i) A açık ise $A \subset (\bar{A})^o$ dir.
 - (j) A kapalı ise $(A^o)^- \subset A$ dır.
2. Bir topolojik uzayda sonlu tane kümenin bileşiminin kaplamı, bu kümelerin kaplamalarının bileşimine eşittir. Gösteriniz ([W3] özeliğinin genelleşmesi). Arakesit işlemi için nasıl bir özellik vardır? (l(a) sorusunun genelleşmesi.)
3. Örnek 2.1.3 teki üç topolojiye göre $L = \{a, b\}$ ve $M = \{a, c\}$ kümelerinin kaplamalarını bulunuz.
4. Bir X kümesi üzerindeki ayrık topolojiye göre, her $A \subset X$ alt kümesi için $A = \bar{A}$ olduğunu gösteriniz.
5. Sonsuz bir X kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre, her sonsuz $A \subset X$ alt-kümesi için $\bar{A} = X$ olduğunu gösteriniz.
6. Bir A kümesinin bir topolojik uzayın hiçbir yerinde yoğun olmaması için gerekli ve yeterli koşul, her açık kümenin A ile kesişmeyen ve boş olmayan açık bir alt-kümesinin varlığıdır. Gösteriniz.
7. Kapalı bir kümenin hiçbir yerde yoğun olmaması için gerekli ve yeterli koşul, tümleyeninin her yerde yoğun olmasıdır. Gösteriniz. Her hangi bir küme için de bu özellik var mıdır?

8. Kapalı bir kümenin kenarı hiçbir yerde yoğun değildir. Gösteriniz. Her hangi bir küme için de bu özellik söylenebilir mi?
9. $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki topolojilerin her birisi için $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin iç noktaları kümesini, yığılma noktaları kümesini ve kaplamını bulunuz. (*)
 - (a) Açık kümeleri, açık aralıkların bir bileşimi olarak yazılabilen topoloji (salt topoloji).
 - (b) Kapalı kümeleri, yalnızca, sonlu alt kümelerden oluşan topoloji (sonlu tümleyenler topolojisi).
 - (c) Kapalı kümeleri, yalnızca, sayılabilir alt kümelerden oluşan topoloji (sayılabilir tümleyenler topolojisi).
10. $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{T}$ ailesine ait T kümeleri aşağıdaki özeliğe sahip iseler, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nun bir topolojik uzay olduğunu gösteriniz:

$$T \in \mathcal{T} \iff (\forall x \in T)(\exists (a, b) \subset T : x \in (a, b))$$

Bu uzayda bir T kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul, T ye ait her noktayı içeren açık bir aralık kapsamasıdır. Bu uzaya $\mathbb{R}$ üzerindeki *salt (mutlak) topoloji* denilir. Bu topoloji, yukarıda tanımlanan (9a) topolojisidir. Bu topolojiyi ileride başka yöntemlerle de kuracağız. Bu, gösteriyor ki, bir küme üzerinde aynı topoloji farklı yöntemlerle kurulabilir.

11. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre $\mathbb{R}$ nin açık olduğunu gösteriniz.
12. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre, her b gerçel sayısı için, $(-\infty, b)$ biçimindeki aralıkların açık olduğunu gösteriniz.
13. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre, her a gerçel sayısı için, $(a, +\infty)$ biçimindeki aralıkların açık olduğunu gösteriniz.
14. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ içindeki her açık (a, b) aralığının kenar noktaları kümesi $\partial A = [a, b]$ kapalı aralıktır. Gösteriniz.
15. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ içinde $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin kenar noktaları kümesi $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ dir. Gösteriniz.
16. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ uzayı içinde bileşimleri kapalı olmayan bir kapalı kümeler dizisi kurunuz.