

## Bölüm 15

# TIKIZLIK

### Kısa Tarihçe

19.Yüzyıl, matematikte devrim niteliğinde büyük buluşların yapıldığı, yeni akımların filizlendiği ve 20.Yüzyıl matematiğinin yolunu çizen çok verimli bir dönemdir. Bu dönemin değerlendirilmesi, bu satırları yazanın yapamayacağı kadar çok zor bir iştir ve bu kitabın konusu değildir. Ancak, **tıkızlık** (**compactness**) ile ilgili gelişimi çok kısaca özetlemenin, öğrenciyi motive edici bir yararı olacağı düşünülebilir.

19.Yüzyılda, aralarında *Cantor*, *Weierstrass*, *Peano* ve *Dedekind* gibi adların yer aldığı bir akım matematiğin temellerini (foundations) kurmaya uğraşmaktadır. *Bolzano* ile başlayan ve sonrasında *Weierstrass*, *Arzelá*, *Ascoli*, *Peano* ve *Fréchet* gibi adları içine alan bir akım ise **sayılabilir tıkızlık** (**countable compactness**) kavramına erişti. *Heine*, *Borel*, *Lebesgue* ve *Urysohn* gibi adları içine alan başka bir akım **açık örtülerle belirlenen tıkızlık** kavramına ulaştı.

Elbette bu akımları kesin çizgilerle birbirinden ayırmak olanaksızdır. Herhalde, gidilen ana yolun gerçel sayıları kurmak, fonksiyonların özelliklerini açığa çıkarmak, diferensiyel ve integral denklemleri çözmek gibi zor problemlerle dolu olduğu söylenebilir.

Genel topolojide tıkız uzaylar, analizdeki bazı önemli özellikleri soyut uzaylara genelleştirir. Konuyu çok basit ifade etmeye kalkışmak yanlış anlamalara neden olabilir. Ama, öğrencinin konuya ilgisini çekebilmek için şunu söyleyebiliriz. Sonlu kümelerle uğraşmak kolaydır. Acaba küme sonsuz olduğunda, benzer kolaylığı sağlayacak araçlar yaratılabilir mi? Benzer olarak, gerçel ekseninde "küçük kümelerle" uğraşmak da kolaydır. Tabii, burada *küçük küme* terimi tanımsızdır. Ama gerçel eksenindeki *sınırlı* ve *kapalı* kümelerin

bu kavrama karşılık getirildiğini sezebiliriz. Acaba gerçel ekseninde sınırlı ve kapalı kümelerin özelliklerini soyut uzaylara taşıyabilir miyiz?

19.Yüzyıda matematik analizde elde edilen bazı özelliklerin genelleştirilmesi için harcanan çabalar, sonunda bu gün adına tıkHz (compact) uzaylar dediğimiz uzayları yaratmıştır. 1817 yılında *Bernhard Bolzano* doğru üzerinde ya da düzlemde alınan sınırlı bir dizinin terimlerinin bir noktaya (limit) yaklaştığını keşfetti. Adına yarılama yöntemi dediğimiz basit ama zekice bir buluş olan *Bolzano*'nun ispat tekniğı 50 yıl sonra *Karl Weierstrass* tarafından yeniden keşfedilinceye kadar çok ilgi görmedi.

1880 yılında, **Bolzano-Weierstrass** teoreminin benzerinin sürekli fonksiyon uzaylarına uygulanabileceğı *Giulio Ascoli* ve *Cesare Arzelá* tarafından gösterildi. Bu sonuç, uygun fonksiyonlar ailesinden düzgün yakınsak bir fonksiyon dizisinin seçilebileceğini söylüyordu. Seçilen bu dizinin limiti, *Bolzano*'nun keşfettiğı *limit noktasının* rolünü oynuyordu.

20.Yüzyıla girilirken, *David Hilbert* ve *Erhard Schmidt*, **Arzela-Ascoli** teoreminin benzerinin integral denklemlere uygulanabileceğini gösterdiler. Bu buluş tıkHz operatör (compact operator) kavramını yarattı.

1906 yılında *Maurice Fréchet*, **Bolzano-Weierstrass** teoreminin özünü yakalayabildi ve ondan sayılabilir tıkHzlık (countable compactness) dediğimiz genellemeye ulaşabildi. *Fréchet*, tıkHzlık (compactness) terimini ilk kullanan kişidir.

Matematik analizi derinden etkileyen bu alandaki çalışmaların farklı yönlerde gelişmiş olması doğaldır. Dolayısıyla, farklı tıkHzlık kavramları ortaya çıktı. Bunların bazıları birbirlerine (belli uzay tipleri üzerinde) denktirler. Bazıları başkalarını özel haller olarak içselleştiren genelliktedirler.

1870 yılında *Eduard Heine*, kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı olan fonksiyonların düzgün sürekli olduklarını gösterdi. Heine, bu teoremi ispatlamak için önce bir yardımcı teorem (lemma) ispatlama gereğini duydu. Bu yardımcı teoremden, aldığı sınırlı ve kapalı aralığı örten sayılabilir sayıda açık aralıklardan oluşan her örtüden, sonlu bir altörtü seçilebileceğini göstermişti. *Heine*'nin farkedemediğı bu özeliğın önemini 1895 yılında *Emile Borel* gördü. Bu özellik, *Pierre Cousin* (1895) ve *Henri Lebesgue* (1904) tarafından, sayılabilirlik koşulu kaldırılarak her hangi bir açık aralıklar örtüsü için ispatlandı. Bu gün **Heine-Borel teoremi** diye bilinen bu buluş, gerçel sayıların kapalı ve sınırlı altkümelerinin taşıdığı önemli bir özelliktir.

Ortaya konan bu buluşun önemi, fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğı gibi yerel kavramları, düzgün süreklilik gibi global kavramlara taşımasıdır. Bu özeliğı açığa vuran *Lebesgue* (1904) kendi adıyla anılan integral kuramını

oluşturdu.

Kurulan bu büyük binanın çatısını, *Pavel Alexandrov* ve *Pavel Urysohn* yönetimindeki Rus Okulu tamamladı. 1929 yılında bu ikili şu bulguya ulaştı: *Fréchet* tarafından ortaya konulan **dizisel tıkızlık**, belirli koşullar altında, sonlu altörtünün varlığından çıkarılabilir.

Bu gün matematikte baskın (dominant) konuma gelen tıkızlık kavramı, her açık örtüden sonlu bir altörtü seçilebilmesi özeliğine dayalı olan tıkızlıktır. Ama tek başına bu kavram, ne tıkızlığın tarihi gelişimini ne de farklı tıkızlık kavramlarını içseler. Açık örtülerle belirlenen tıkızlık yanında, belirli koşullar altında biri ötekine denk olan ya da biri ötekini genelleyen farklı tıkızlık kavramlarını sayabiliriz. Her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olması durumu *dizisel tıkızlık*, sayılabilir her açık örtüden sonlu bir altörtü seçilebilmesi durumu *sayılabilir tıkızlık*, her sonsuz altkümenin bir limite sahip olması durumu *limit noktası tıkızlığı*, Bourbaki okulunun *tıkızımsı* (*quasicompact*) uzayı, sürekli her gerçel fonsiyonun sınırlı olması durumu *sözde tıkızlık* (*pseudo-compact*), indeksi  $\aleph_0$  olan (*Lindelöf*) *tıkızlığı* bunların başlıcalarıdır. Bu kavramları yaratanların verdikleri adlar da bu gün kullandığımız terimlerden farklı idi.

## 15.1 TIKIZ UZAYLAR

Aşağıdaki tanımları anımsayalım:

**Tanım 15.1.1.** Bir  $(X, \mathcal{T})$  uzayı verilsin.  $X$  kümesinin altkümelerinden oluşan bir  $\mathcal{U}$  ailesinin bileşimi  $X$  kümesine eşit oluyorsa,  $\mathcal{U}$  ailesine  $X$  kümesinin bir *örtüsüdür*, denilir.

Eğer  $\mathcal{U}$  ailesine ait kümelerin hepsi açık (ya da kapalı) ise,  $\mathcal{U}$  ailesine  $X$  kümesinin *açık (ya da kapalı) bir örtüsüdür*, denilir.

Eğer  $\mathcal{U}$  nun bir altailesi  $X$  kümesinin bir örtüsü ise, bu altaileye  $\mathcal{U}$  nun bir *altörtüsü*, denilir.

**Tanım 15.1.2.**  $\mathcal{U}$  ile  $\mathcal{V}$ ,  $X$  kümesinin iki açık örtüsü olsun. Eğer her  $U \in \mathcal{U}$  için  $V \subset U$  olacak şekilde bir  $V \in \mathcal{V}$  kümesi varsa  $\mathcal{V}$  örtüsüne,  $\mathcal{U}$  örtüsünün bir *büzülmüşüdür*, denilir. Eğer açık  $\mathcal{U}$  örtüsünün bir büzülmüşü varsa,  $\mathcal{U}$  ya *büzülebilir bir örtüdür*, diyeceğiz.

**Tanım 15.1.3.** Bir  $(X, \mathcal{T})$  uzayı verilsin. Eğer  $X$  kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa,  $(X, \mathcal{T})$  uzayına *tıkız* (*compact*) bir uzaydır, denilir.

**Uyarı 15.1.1.** 20.Yüzyıl matematiğine büyük katkısı olan Fransız *Bourbaki* Okulu *tıkız* (*compact*) uzay yerine *tıkızimsı* (*quasicompact*) uzay terimini kullanır <sup>1</sup>.

Tanım 15.1.3 ile *Bourbaki* tanımı arasında bir üstünlük farkı yoktur. Kitap boyunca hangi tanımın esas alındığı iyi gözetildiği sürece, birisi ötekine göre ne kolaylık ne de zorluk yaratır.

**Tanım 15.1.4.**  $(X, \mathcal{T})$  bir uzay olsun ve bir  $A \subset X$  altkümesi verilsin. Eğer  $(A, \mathcal{T}_A)$  alt uzayı tıkız ise  $A$  ya  $X$  in *tıkız* bir altkümesidir, denilir.

**Örnek 15.1.1.** Gerçel eksen, üzerindeki salt topolojiye göre tıkız değildir. Gerçekten,  $\mathfrak{N} = \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$  açık aralıklar ailesi gerçel eksenin bir açık örtüsüdür, ancak bu aileden sonlu bir altörtü seçilemez.

**Örnek 15.1.2.** Sonsuz bir küme, üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre tıkızdır.

**Tanım 15.1.5.** Bir kümeler ailesinin her sonlu altailesinin arakesiti boş değilse, bu aileye *sonlu arakesit özelliğine sahiptir* denilir.

**Teorem 15.1.1.** Bir  $(X, \mathcal{T})$  uzayı için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- (i) Uzay tıkızdır.
- (ii)  $X$  üzerindeki her süzgecin enaz bir kaplama noktası vardır.
- (iii) Kapalı kümelerden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine sahip olan bir ailenin arakesiti boş değildir.
- (iv) Kapalı kümelerden oluşan ve arakesiti boş olan bir ailenin, arakesiti boş olan sonlu bir altailesi vardır.

İSPAT:  $(i) \Rightarrow (ii)$ :  $\mathcal{S}$  ailesi  $X$  üzerinde bir süzgeç olsun.  $\mathcal{S}$  nin hiçbir kaplama noktası olmasaydı, Tanım 13.4.3 gereğince

$$\bigcap_{S \in \mathcal{S}} \bar{S} = \emptyset \quad (15.1)$$

---

<sup>1</sup>Bourbaki: Bir  $(X, \mathcal{T})$  uzayı verilsin. (i) Eğer  $X$  kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa  $(X, \mathcal{T})$  uzayı *tıkızimsı* (*quasicompact*) bir uzaydır. (ii) Tıkızimsı bir Hausdorff uzayı *tıkız* (*compact*) bir uzaydır.

olacaktı, ki bunun eşlek bağıntısı

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} (\bar{S})' = X \quad (15.2)$$

olurdu. Bu ise  $\{(\bar{S})' \mid S \in \mathcal{S}\}$  ailesinin  $X$  kümesinin bir açık örtüsü olması demektir. O halde, (i) gereğince, bu ailenin sonlu bir  $\{(\bar{S}_i)' \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  altörtüsü vardır; yani

$$\bigcup_{i=1}^n (\bar{S}_i)' = X$$

dir. Bunun eşleği

$$\bigcap_{i=1}^n \bar{S}_i = \emptyset$$

olacaktır, ki bu  $\mathcal{S}$  nin süzgeç olmasıyla çelişir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):  $X$  kümesinin kapalı altkümelerden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine sahip olan bir  $\mathfrak{K}$  ailesi verilsin.  $\mathfrak{K}$  nın ürettiği bir  $\mathcal{S}$  süzgeci vardır. (bkz. Önerme 13.2.2). O halde (ii) gereğince bu süzgecin en az bir kaplama noktası varolacaktır ve  $\mathfrak{K}$  nın öğeleri kapalı olduğundan, bu kaplama noktası  $\mathfrak{K}$  nın her öğesine ait olacaktır; yani  $\mathfrak{K}$  nın arakesiti boş değildir.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Kapalı kümelerden oluşan bir  $\mathfrak{K}$  ailesinin arakesiti boş olsun. Eğer  $\mathfrak{K}$  ailesinin hiç bir sonlu arakesiti boş olmuyorsa, (iii) gereğince,  $\mathfrak{K}$  nın da arakesiti boş olmayacaktır, ki bu, verilen varsayımınla çelişir.

(iv)  $\Rightarrow$  (i):  $\mathfrak{U}$  ailesi  $X$  kümesinin bir açık örtüsü olsun

$$\bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U = X$$

bağıntısının eşleği olarak

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U' = \emptyset$$

bağıntısı elde edilir.  $U'$  ler kapalı ve arakesitleri boş olduğundan, (iv) gereğince

$$\bigcap_{i=1}^n U'_i = \emptyset$$

olacak şekilde sonlu bir  $\{U'_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  alt-ailesi vardır. Bu bağıntının eşleğini yazarsak  $\mathfrak{U}$  nun sonlu,  $\{U_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  alt-ailesinin  $X$  kümesinin bir açık örtüsü olduğu görülür.

**Teorem 15.1.2.**  $(X, \mathcal{T})$  uzayı için aşağıdaki özellikler eşdeğerdirler:

- (i)  $X$  kümesinin sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır.
- (ii)  $X$  kümesinin her sonsuz altkümesinin enaz bir yığılma noktası vardır.
- (iii) Boş olmayan kapalı kümelerden oluşan

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots \quad (15.3)$$

gibi iç-içe azalan her kümeler dizisinin arakesiti boş değildir.

İSPAT:

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sonsuz bir  $A$  kümesinin hiçbir yığılma noktası olmasın.  $A$  nın, farklı noktalardan oluşan sayılabilir bir  $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  altkümesini alalım. Tabii,  $B$  nin de hiçbir yığılma noktası olmayacaktır. Ayrıca  $B$  nin her ögesi bir kenar noktasıdır; yani  $\partial B = B$  dir. Kenar küme kapalı olduğundan (bkz. 2.3.1 Problem 4)  $B$  kapalıdır. O halde  $B'$  açıktır. Kabulümüz gereğince, her  $x_n \in B$  için öyle bir  $V_n$  komşuluğu bulabiliriz ki  $V_n$  nin  $B$  ile  $x_n$  den başka ortak noktası olmaz. Bu durumda  $\{B', V'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $X$  kümesinin sayılabilir bir açık örtüsü olacaktır ve bu ailenin sonlu bir altörtüsünün olmayacağı apaçıktır. Bu ise (i) varsayımına aykırıdır. Öyleyse kabulümüz yanlıştır; yani  $A$  nın enaz bir yığılma noktası vardır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Eğer belli bir damgadan sonra  $A_n$  kümeleri eşit iseler, verilen kümeler dizisinin arakesiti bu ortak kümedir; dolayısıyla boş değildir. Eğer böyle değilse, gerekiyorsa verilen kümeler dizisinin birbirlerinden farklı bir alt dizisini seçerek, her  $i \in \mathbb{N}$  için  $A_i \neq A_{i+1}$  kabul edebiliriz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için bir  $a_n \in A_n - A_{n+1}$  ögesi seçerek sonsuz bir  $\{a_n\}$  dizisi oluşturalım. (ii) gereğince  $\{a_n\}$  dizisinin bir yığılma noktası vardır; buna  $a$  diyelim. Her  $i \in \mathbb{N}$  için  $n \geq i$  olduğunda  $a_n \in A_i$  olacağından  $a \in A_i$  dir. O halde

$$a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

dir; yani verilen kümeler dizisinin arakesiti boş değildir.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii):  $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $X$  kümesinin sayılabilir açık bir örtüsü olsun.

$$A_n = \{(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n)'\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde kapalı kümelerin iç-içe azalan bir  $\{A_n\}$  dizisini oluşturalım. Hemen görüleceği gibi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i = \emptyset$$

olur. O halde (iii) gereğince bir  $A_i = \emptyset$  olmalıdır. Buradan

$$A'_i = \bigcap_{j=1}^i V_j = X$$

çıkar ve bu  $\mathcal{V}$  örtüsünün sonlu bir altörtüsünün varlığı demektir.

**Örnek 15.1.3.** Tıkız bir uzay Hausdorff olmayabilir. Örneğin,  $X = \{a, b, c\}$  kümesi

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$$

topolojisi ile donatılırsa  $(X, \mathcal{T})$  uzayı tıkız olur. Ancak,  $B = \{b\}$  ile  $C = \{c\}$  ayrık ve kapalı kümelerinin birbirlerinden ayrık açık komşulukları yoktur.

**Önerme 15.1.1.** *İkinci Sayılabilirlik Aksiyomunu sağlayan bir Hausdorff uzayı Teorem 15.1.1 nin eşdeğer özelliklerinden birini (dolayısıyla hepsini) sağlıyorsa tıkız bir uzaydır.*

İSPAT: Bir  $(X, \mathcal{T})$  uzayı ile  $\mathcal{T}$  nun bir  $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  sayılabilir tabanı verilsin.  $\mathcal{U}$  ailesi  $X$  kümesinin bir açık örtüsü olsun. Her  $V \in \mathcal{U}$  kümesi  $\mathcal{B}$  ye ait kümelerin bir bileşimi olarak yazılabilir. O halde  $X$  kümesi  $\mathcal{B}$  tabanına ait kümelerin bir bileşimi olarak yazılabilir.

Varsayımımız gereğince,  $\mathcal{B}$  nin sonlu bir  $\{B_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$  ailesi  $X$  kümesini örtecektir (bkz. 4.1.3). Öte yandan her bir  $B_j$  için  $B_j \subset V_j$  olacak şekilde bir  $V_j \in \mathcal{U}$  var olduğundan

$$\bigcup_{j=1}^n V_j = X$$

olacaktır.

**Önerme 15.1.2.** *Tıkız bir uzayın kapalı her altkümesi tıkızdır.*

İSPAT:  $A$  kümesi  $(X, \mathcal{T})$  uzayının kapalı bir altkümesi olsun.  $(A, \mathcal{T}_A)$  alt-uzayında kapalı olan her  $B \subset A$  altkümesi  $(X, \mathcal{T})$  uzayı içinde de kapalı olacağından, Önerme 8.3.2 ile Teorem 15.1.1 den istenen şey hemen görülür.

**Önerme 15.1.3.**  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorff,  $A \subset X$  tıkmaz bir altkümeye olsun ve bir  $p \notin A$  verilsin. Bu durumda

$$A \subset V, p \in W, V \cap W = \emptyset$$

olacak şekilde  $V$  ve  $W$  açık kümeleri vardır.

İSPAT: Değişken bir  $x$  noktası  $A$  yı tarasın. Uzay Hausdorff olduğundan her  $x \in A$  için öyle bir  $V_x \in \mathcal{B}(x)$  ile öyle bir  $W_x \in \mathcal{B}(p)$  açık komşulukları vardır ki  $V_x \cap W_x = \emptyset$  dır. Tabii  $\{V_x \mid x \in A\}$  ailesi  $A$  nın açık bir örtüsü olacaktır. O halde bu ailenin

$$\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü varolacaktır. Bu durumda

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$$

$$W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$$

kümeleri açıktır ve kesişmezler. Ayrıca

$$W \in \mathcal{B}(p)$$

$$A \subset V$$

$$V \cap W = \emptyset$$

olacağı açıktır.

**Teorem 15.1.3.** Bir Hausdorff uzayının her tıkmaz altkümesi kapalıdır.

İSPAT: Yukarıda her  $p \in A'$  noktasının  $A'$  nün bir iç-noktası olduğunu gösterdik; yani  $A'$  açıktır. O halde  $A$  kapalıdır.

**Teorem 15.1.4.** Hausdorff ve tıkmaz bir uzayın bir altkümesinin tıkmaz olması için gerekli ve yeterli koşul kapalı olmasıdır.

İSPAT: Gerekliği önceki Sonuçta, yeterliği ise önceki Önermede verildi.

**Teorem 15.1.5.** Tıkmaz ve Hausdorff olan her uzay normaldir.



İSPAT:  $(X, \mathcal{T})$  tıkız ve Hausdorff bir uzay olsun.  $X$  içinde  $A$  ile  $B$  ayrık ve kapalı (dolayısıyla tıkız) herhangi iki altküme olsun. Değişken bir  $y$  noktası  $B$  kümesini tarasın. Her  $y \in B$  için, Önerme 15.1.3 uyarınca,

$$A \subset V_y, \quad y \in W_y, \quad V_y \cap W_y = \emptyset$$

olacak şekilde açık  $V_y$  ve  $W_y$  kümeleri vardır.  $B$  nin  $\{W_y \mid y \in B\}$  açık örtüsünden sonlu bir

$$\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$$

altörtüsü seçilebilir. O halde

$$V = \bigcap_{i=1}^m V_i, \quad W = \bigcup_{i=1}^m W_i \quad (15.4)$$

açık kümeleri

$$A \subset V, \quad B \subset W, \quad V \cap W = \emptyset \quad (15.5)$$

bağıntılarını sağlayacaklardır, ki bu, normal uzay olma aksiomunun (bkz. Tanım:  $[N]$  aksiyonu 14.7.1) sağlanması demektir.

$E$  nin bir altkümesinin kaplamı tıkız ise buna göreceli tıkız bir altkümedir denilir.

Klâsik *Bolzano-Weierstrass* teoremi der ki  $n$ -boyutlu  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayının tıkız altkümeleri hem sınırlı hem kapalı olan altkümeleridir; bunun göreceli tıkız altkümeleri ise yalnız sınırlı olan altkümeleridir.

Bu konu *Metrik Uzaylarda* daha ayrıntılı olarak incelenecektir.

Bir Hausdorff uzayında sonlu her altkümenin tıkız olduğu apaçıktır. Yine sonlu tane tıkız altkümenin bileşiminin tıkız olduğunu ve bu özeliğin göreceli tıkız altkümeler için de varlığını görmek kolaydır.

**Teorem 15.1.6.**  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  sürekli bir fonksiyon ve  $(X, \mathcal{T})$  tıkız bir uzay ise  $f(X) \subset Y$  resmi de tıkızdır.

İSPAT:  $\mathcal{V}$  ailesi  $f(X)$  altkümesinin bir açık örtüsü olsun.  $f$  sürekli olduğundan

$$f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$$

ailesi  $X$  in bir açık örtüsü olacaktır. Varsayımımız gereğince, bunun

$$\{f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \dots, f^{-1}(V_n)\}$$

gibi sonlu bir altörtüsü vardır. Buradan,  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sonlu alt-ailesinin  $f(X)$  kümesini örteceği hemen görülür.

**Sonuç 15.1.1.** Gerçek değerli ve sürekli bir  $f$  fonksiyonu tıkız bir küme üzerinde sınırlıdır ve bu küme üzerinde maksimum ve minimum değerlerini alır.

İSPAT:  $(X, \mathcal{T})$  tıkız bir uzay olsun ve sürekli bir  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Yukarıdaki önerme gereğince,  $f(X)$  gerçel ekseninin tıkız bir altkütmesi olacaktır.  $X$  boş olmadığından  $f(X)$  görüntü kümesi boş değildir. Gerçel eksenin sınırsız bir altkütmesi tıkız olmayacağına göre,  $f(X)$  sınırlıdır. Ayrıca  $f(X)$  kapalıdır. (bkz. Teorem 15.1.4). O halde  $f(X)$  kümesinin gerçel eksen üzerindeki  $\leq$  sıralamasına göre *en büyük alt sınırı* (ebas, inf) ve *en küçük üst sınırı* (eküs, sup) vardır.

$$a = \inf\{f(X)\} \quad , \quad b = \sup\{f(X)\}$$

diyelim. Bu durumda  $a = f(x)$ ,  $b = f(y)$  olacak şekilde bir  $x \in X$  ile bir  $y \in X$  var demektir.  $a, b \in f(X)$  olduğunu görmek için

$$F_n = \{z \in X : a \leq f(z) \leq a + \frac{1}{n}\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

iç-içe kümeler dizisini tanımlayalım.  $f$  sürekli olduğundan her bir  $F_n$  kümesi kapalıdır. Öyleyse, her  $n$  için  $a \in F_n$  olduğu düşünülürse, 15.1.1 (iii) uyarınca,  $a \in \cap F_n \subset X$  olur.

Şimdi de,

$$K_n = \{z \in X : b - \frac{1}{n} \leq f(z) \leq b\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

iç-içe kapalı kümeler dizisini tanımlayalım. Yukarıdakine benzer düşünüşle  $b \in \cap K_n \subset X$  olduğu söylenebilir.

**Teorem 15.1.7** (Alexander).  $(X, \mathcal{T})$  bir Hausdorff topolojik uzay ve  $\mathfrak{S}$  bunun herhangi bir alt-tabanı olsun. Bu durumda aşağıdaki iki ifade eşdeğerdir:

- (i)  $X$  uzayı tıkızdır.
- (ii)  $X$  uzayının  $\mathfrak{S}$  alt-tabanının kimi öğelerinden oluşan her örtüsünden sonlu bir örtü seçilebilir.

İSPAT: (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Tıkız olma tanımından apaçık görülür.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. (ii) nin sağlandığını ama (i) in sağlanmadığını varsayalım.  $X$  uzayındaki bütün açık örtülerin

içinden, sonlu altörtüsü olmayanların ailesini  $\mathcal{X}$  ile gösterelim.  $\mathcal{X}$  ailesi "kapsama" bağıntısına göre tikel (kısımlı) sıralıdır.  $\mathcal{X}$  içinde boş olmayan bir zincirin bileşimi  $\mathcal{X}$  içindeki bir açık örtüdür. *Zorn Teoremine* göre  $\mathcal{X}$  ailesi içinde bir *büyükçe (maksimal)* bir  $\mathfrak{M}$  örtüsü vardır. Bu demektir ki,  $\mathfrak{M}$  örtüsü  $X$  uzayının bir açık örtüsüdür, ama  $\mathfrak{M}$  örtüsünün sonlu bir altörtüsü yoktur. Öyleyse,  $U$  kümesi  $\mathfrak{M}$  içinde olmayan herhangi bir açık küme olmak üzere  $\mathfrak{M} \cup \{U\}$  ailesi  $\mathfrak{M}$  ailesine ait değildir; dolayısıyla sonlu bir altörtüsü vardır. Böyle olmasaydı bu aile  $\mathcal{X}$  ye ait olacaktı, ki bu durumda  $\mathfrak{M}$  ailesine ait olması gerekirdi.  $U \notin \mathfrak{M}$  olduğundan, bu olanaksızdır.

Şimdi  $\mathcal{W} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}$  arakesitini düşünelim. Bir yandan,  $\mathcal{W} \subset \mathfrak{M}$  olduğundan  $\mathcal{W}$  ailesinin  $X$  uzayını örten sonlu bir altailesi yoktur. Öte yandan,  $\mathcal{W} \subset \mathfrak{S}$  olduğundan,  $\mathcal{W}$  ailesi  $X$  uzayını örtemez; örtseydi (ii) koşulu uyarınca  $\mathcal{W}$  ailesinin  $X$  uzayını örten sonlu bir altörtüsü olacaktı. Bu ise,  $\mathcal{W} \subset \mathfrak{M}$  kapsamaması nedeniyle,  $\mathfrak{M}$  ailesinin de  $X$  uzayını örten sonlu bir altörtüye sahip olduğu anlamına gelirdi. Oysa  $\mathfrak{M}$  ailesi bu niteliğe sahip olmayacak şekilde seçilmişti.

$\mathcal{W}$  ailesi  $X$  uzayını örtmüyorsa,

$$x \in X \cap \left( \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \right)' \quad (15.6)$$

olacak şekilde bir  $x$  noktası seçebiliriz.  $\mathfrak{M}$  bir örtü olduğundan  $x \in M \in \mathfrak{M}$  olan bir  $M$  açık kümesi vardır.  $\mathfrak{S}$  alt-taban olduğundan,  $M$  açık kümesi  $\mathfrak{S}$  ailesine ait bazı kümelerin bir bileşimi olarak yazılabilir. Bunlar arasından  $x$  ögesini içeren sonlu sayıda

$$S_1, S_2, \dots, S_n \quad (15.7)$$

kümelerini seçelim.

$$x \in \bigcap_{j=1}^n S_j \subset M \quad (15.8)$$

olacağı açıktır.

$$x \notin \left( \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \right) \quad (15.9)$$

olduğundan, (15.7) kümelerinin hiç birisi  $\mathcal{W}$  içinde değildir.  $\mathfrak{M}$  maksimal bir örtü olduğundan, her  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  için

$$X = S_i \cup (M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup M_{i_3} \cup \dots \cup M_{i_r}) \quad (15.10)$$

olacak şekilde sonlu sayıda  $M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, \dots, M_{i_r} \in \mathfrak{M}$  açık kümeleri vardır. Her  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  için

$$A_i = (M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup M_{i_3} \cup \dots \cup M_{i_r}) \quad (15.11)$$

dersek,

$$M \cup \left( \bigcup_{j=1}^n A_j \right) \supset \left( \bigcap_{i=1}^n S_j \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^n A_j \right) = X \quad (15.12)$$

bağıntısı çıkar. Böylece  $X$  uzayı  $\mathfrak{M}$  ailesine ait sonlu sayıda kümelerin bir bileşimi olur. Bu sonuç  $\mathfrak{M}$  ailesinin seçilişine aykırıdır. Bu bir çelişkidir. O halde, kabulümüz yanlıştır.

**Teorem 15.1.8** (Tychonoff). *Boş olmayan topolojik uzayların boş olmayan bir ailesinin çarpım uzayının tıkHz olması için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzayların her birisinin tıkHz olmasıdır.*

İSPAT:

$$\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\} \quad (15.13)$$

verilen topolojik uzaylar ailesi olsun.

*Gerekliği:* Bu uzayların  $(X, \mathcal{P})$  çarpım uzayı tıkHz ise, izdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan,

$$\pi_i(X) = X_i \quad (i \in I) \quad (15.14)$$

resimleri de tıkHz olacaktır (bkz. Teorem 15.1.6).

*Yeterliği:* Alexander Teoremine göre,  $\mathcal{P}$  çarpım topolojisinin  $\mathfrak{S}$  alt tabanıyla yapılan açık örtülerini düşünmek yetecektir [bkz. (9.6)] Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Bir  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$  altörtüsünün  $X$  çarpım uzayını örten hiçbir sonlu altörtüsü olmadığını varsayalım. Her  $i \in I$  için

$$\mathfrak{U}_i = \{T \in \mathcal{T}_i : \pi_i^{-1}(T) \in \mathfrak{S}\}$$

diyelim.  $\mathfrak{U}$  üzerine koyduğumuz varsayım altında,  $\mathfrak{U}_i$  açık kümeler ailesi  $X_i$  tıkHz uzayının bir örtüsü olamaz. Olsaydı,  $X_i$  nin sonlu bir  $T_1, T_2, \dots, T_n \in \mathcal{T}_i$  altörtüsü seçilebilirdi. Bu durumda

$$\pi_i^{-1}(T_r), r = 1, 2, \dots, n$$

ailesi  $X$  çarpım uzayının  $\mathfrak{U}$  dan seçilen sonlu bir altörtüsü olurdu. Bu ise  $\mathfrak{U}$  ya yüklenen varsayıma aykırıdır. Öyleyse  $X_i$  çarpan uzayından öyle bir  $x_i$  ögesi seçebiliriz ki, bu öge  $\mathfrak{U}_i$  ye ait hiç bir küme tarafından içerilemez. Her  $i \in I$  için bu biçimde seçilecek öğeleri bileşenleri varlayan  $x = (x_i)_{i \in I}$  ögesini düşünebiliriz ki bu bir çelişkidir. Bu çelişki olmayacağından,  $\mathfrak{S}$  alt-tabanının her altörtüsünden  $X$  çarpım uzayının bir altörtüsü seçilebilmelidir.

**Tanım 15.1.6.** TıkHz ve bağlantılı uzaya *sürey* (*continuum*) denilir.

### 15.1.1 PROBLEMLER

1. Gerçel eksenin açık ya da yarı-açık hiçbir aralığının tıkHz olmadığını gösteriniz.
2. TıkHz bir uzayda tıkHz iki altkümenin bileşiminin ve arakesitinin tıkHz olduğunu gösteriniz.
3. Sonsuz bir küme, kendi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre tıkHzdır. Neden?
4. Ayrık topolojiye göre bir kümenin tıkHz olması için gerekli ve yeterli koşul sonlu olmasıdır. Neden?
5.  $(X, \mathcal{T})$  sayılabilir tümleyenler uzayı ve  $B \subset A \subset X$  olsun.  $B$  nin  $(A, \mathcal{T}_A)$  nin tıkHz bir altkümesi olması için gerekli ve yeterli koşul sonlu olmasıdır. Neden?
6. TıkHz bir uzaydan bir Hausdorff uzayı üzerine tanımlı bire-bir sürekli bir fonksiyonun bir topolojik eşyapı dönüşümü olacağını gösteriniz.

## 15.2 YEREL TIKIZ UZAYLAR

**Tanım 15.2.1.** Bir Hausdorff uzayının her noktasının tıkHz bir komşuluğu varsa, bu uzaya **yerel tıkHz** bir uzaydır, denilir.

Tıkız bir uzay aynı zamanda yerel tıkızdır. Çünkü, kendisi her noktasının bir komşuluğudur. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin, sonsuz bir küme, üzerindeki ayrık topolojiye göre yerel tıkızdır, ama tıkız değildir. Gene, gerçel eksen, üzerindeki salt topolojiye göre yerel tıkızdır, ama tıkız değildir. Gerçekten, her  $x \in \mathbb{R}$  noktasının  $[x - h, x + h], h > 0$  şeklinde tıkız bir komşuluğu vardır.

**Önerme 15.2.1.** *Yerel tıkız uzayda tıkız bir altkümenin tıkız komşulukları, bu kümenin bir yerel tabanını oluşturur.*

İSPAT:  $E$  yerel tıkız bir uzay ve  $X$  onun tıkız bir altkümesi olsun. Önce  $E$  nin tıkız olduğunu varsayalım.  $X$ 'in bir  $U$  komşuluğunu düşünelim. Gerekirse iç noktaları kümesini seçerek,  $U$  nun açık bir komşuluk olduğunu kabul edersek genellikle birşey yitirmiş olmayız. Böylece  $Y = U'$  kümesi,  $E$  nin kapalı bir altkümesi olduğundan, tıkız olacaktır ( $E$  yi tıkız varsaydığımız için bkz. Teorem 15.1.4). O halde,  $X \subset V, Y \subset W$  ve  $V \cap W = \emptyset$  olan  $V, W$  kümelerinin varlığını (bkz. Teorem 15.1.5) den söyleyebiliriz.  $V \subset W'$  ve  $W$  açık olduğundan  $\bar{V} \subset W'$  olacaktır. Öte yandan  $W' \subset U$  olduğunu düşünürsek  $\bar{V} \subset U$  yazabiliriz. Oysa  $\bar{V}$  kümesi  $X$  in kapalı bir komşuluğudur ve  $U$  tarafından kapsanır. Bu özel halde ispatı bitirmek için ayrıca  $\bar{V}$  kümesinin tıkız olduğuna işaret etmek yetecektir.

Şimdi  $E$  nin yerel tıkız olması halinde ispatı yapalım. Bunun için, önce,  $X$  in enaz bir tane tıkız  $U$  komşuluğuna sahip olduğunu gösterelim.  $x \in X$  için  $U_x$  kümesi  $x$  ögesinin tıkız bir komşuluğu olsun.  $x$  noktaları  $X$  kümesini taradığı zaman  $U_x$  kümelerinin içleri  $X$  in açık bir örtüsü olacaktır; öyleyse, öyle  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  noktaları vardır ki,  $X$  kümesi

$$U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup U_{x_3} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

içinde kalır ve  $U$  tıkızdır. Şimdi  $V$  kümesi  $X$  in keyfi bir komşuluğu olsun.  $U \cap V$  kümesi  $X$  in tıkız  $U$  uzayı içindeki bir komşuluğu olduğundan, baştaki özel hal gereğince,  $U$  uzayında  $X$  in öyle bir  $W$  komşuluğu vardır ki  $W \subset U \cap V$  olur. Özel olarak  $W \subset V$  dir ve  $W, E$  uzayında  $X$  in tıkız bir komşuluğudur.

### 15.3 KARMA PROBLEMLER

1.  $X$  tıkız ve  $Y$  Hausdorff ise sürekli  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu kapalıdır. Gösteriniz.

2.  $Y$  tıkız ise  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  izdüşümü kapalı bir dönüşümdür. Gösteriniz.
3.  $Y$  tıkız ve hausdorff ise  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

grafığının  $X \times Y$  içinde kapalı olmasıdır.

4.  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümü kapalı, sürekli ve örten olsun.  $Y$  tıkız olduğunda, her  $y \in Y$  için  $f^{-1}(\{y\}) \subset X$  tıkız ise,  $X$  uzayının da tıkız olduğunu gösteriniz.
5. Her açık aralık salt topolojiye göre  $\mathbb{R}$  uzayında açıktır. Gösteriniz.
6.  $n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $(n, n+1)$  aralıklarının bileşimi açıktır. Gösteriniz.
- 7.

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (15.15)$$

eşitliğini kullanarak sonsuz sayıda açık kümelerin arakesitinin açık olmayabileceğini gösteriniz.

8.  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar kümesinin, salt topolojiye göre  $\mathbb{R}$  uzayında ne açık ne de kapalı olduğunu gösteriniz.
9. Salt topolojiye göre  $\mathbb{R}$  uzayında bir  $(a, b)$  açık aralığının her  $x \in (a, b)$  ögesi için bir komşuluk olduğunu gösteriniz.
- 10.

$$(0, 1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

olduğunu gösteriniz. Buradan şu sonucu çıkarınız: Sonsuz sayıda kapalı kümelerin bileşimi kapalı olmayabilir.