Bölüm 16

BAĞLANTILI UZAYLAR

Bağlantılı bir uzay deyince sezgisel olarak anlayacağımız şey, tek parçadan oluşan bir uzaydır. Burada tek parçalı olmak deyimi tamamen topolojik bir kavram olarak verilecektir. Basit bir deyişle, boş olmayan açık iki kümenin bileşimine eşit olmayan uzay *bağlantılı bir uzaydır*. Topolojik olarak çok basit olan bu özelliğin analizde ve geometride önemli uygulamaları vardır.

16.1 İKİ KÜMENİN BAĞLANTILILIĞI

Tanım 16.1.1. Bir topolojik uzayın A ve B alt-kümeleri verilsin.

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \quad ve \quad A \cap \bar{B} = \emptyset \tag{16.1}$$

ise A ile B kümelerine *bağlantısız* iki kümedir, diyeceğiz.

Eğer

$$\bar{A} \cap B \neq \emptyset \quad ya \quad da \quad A \cap \bar{B} \neq \emptyset \tag{16.2}$$

ise, A ile B kümelerine *bağlantılı* iki kümedir, diyeceğiz. Bağlantısız iki küme kavramı ayrık (kesişmeyen) iki küme kavramından farklıdır. Örneğin, her küme kendi tümleyeninden ayrıktır. Ama bu iki küme bağlantılı olabilir.

Örnek 16.1.1. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre bir (a, b) açık aralığı ile (b, c) açık aralığı bağlantısız iki kümedir. Ama (a, b) ile $[b, c)$ ve $(a, b]$ ile (b, c) bağlantılı kümelerdir.

Önerme 16.1.1. *Her ikisi de açık ya da her ikisi de kapalı olan ayrık iki küme bağlantısızdır.*

İSPAT: Bir topolojik uzayda $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde herhangi iki A, B alt kümeleri verilsin. Eğer hem A hem B kapalı iseler $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$ olacağından A ile B bağlantısızdır. Eğer A ile B açık iseler A' ile B' kapalı olacaktır. Ayrıca $A \subset B' \quad ve \quad B \subset A'$ olacağından, yine $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ çıkar.

Önerme 16.1.2. *Eğer A ile B kümelerinin her ikisi de açık ya da her ikisi de kapalı ise $A - B$ ile $B - A$ kümeleri bağlantısızdır.*

İSPAT: Genel olarak

$$\begin{aligned}(A - B) \cap \overline{(B - A)} &= A \cap B' \cap \overline{(B \cap A')} \\ &\subset A \cap B' \cap \bar{B} \cap (A')^- \\ &= [A \cap (A')^-] \cap (B' \cap \bar{B})\end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Şimdi, A açık ise $A \cap (A')^- = A \cap A' = \emptyset$ olur. Eğer B kapalı ise $B' \cap \bar{B} = B' \cap B = \emptyset$ olur. Buradan istenen şey görülür.

Önerme 16.1.3. *Eğer $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B$ kapalı ise A kapalı bir kümedir.*

İSPAT: $A \cup B$ kapalı olduğunda $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B} = A \cup B$ olacağına göre $\bar{A} \subset A \cup B$ çıkar. Oysa $\bar{A} \cap B = \emptyset$ olduğundan $\bar{A} \subset A$ olur, ki bu A kümesinin kapalı olduğunu söyler.

Önerme 16.1.4. *$A \cap \bar{B} = \emptyset$ ve $A \cup B$ açık ise A kümesi açıktır.*

İSPAT: $A \cap \bar{B} = \emptyset$ ise

$$(A \cup B) \cap (\bar{B})' = [A \cap (\bar{B})'] \cup [B \cap (\bar{B})']$$

olur. Verilen koşul altında eşitliğin sol yanı açık olduğundan, A kümesi açık bir kümedir.

Bu iki önermeden şu özelik hemen söylenebilir.

Sonuç 16.1.1. *A ile B bağlantısız iki küme olsun. Eğer $A \cup B$ kapalı ise A ve B kapalıdır. Eğer $A \cup B$ açık ise A ve B açıktır.*

16.2 BAĞLANTILI UZAYLAR

Tanım 16.2.1. Eğer bir topolojik uzay bağlantısız ve boş olmayan iki alt kümesinin bileşimine eşitse, bu uzaya *bağlantısız* bir uzaydır, denilir. Bağlantısız olmayan bir uzaya *bağlantılı* bir uzaydır, diyeceğiz.

Örneğin, ayrık olmayan her topolojik uzay bağlantılı bir uzaydır. Ama enaz iki öğesi olan her ayrık uzay bağlantısız bir uzaydır. Çünkü bir X kümesi verildiğinde, her $x \in X$ için, ayrık topolojiye göre $\{x\}$ ile $\{x\}'$ kümeleri bağlantılıdır ve bu iki kümenin bileşimi X kümesine eşittir.

Başka örneklere geçmeden önce, bir topolojik uzayın bağlantılı olup olmadığını belirleyen başlıca özellikleri inceleyelim.

Teorem 16.2.1. *Bir X topolojik uzayı için aşağıdaki özelikler birbirlerine denktir:*

(a) X uzayı bağlantısızdır.

(b) X uzayı, bağlantısız ve boş olmayan iki alt-kümesinin bileşimine eşittir.

(c) X uzayı, boş olmayan ve kesişmeyen iki açık alt-kümesinin bileşimine eşittir.

(d) X uzayı, boş olmayan ve kesişmeyen iki kapalı alt-kümesinin bileşimine eşittir.

(e) X uzayının boş olmayan, hem açık hem kapalı has bir alt-kümesi vardır.

İSPAT:

(a) ⇒ (b) : bağlantılı uzay tanımından hemen görülür.

(b) ⇒ (c) : A ile B bağlantısız iki küme ve $X = A \cup B$ ise, Sonuç 16.1.1 uyarınca, A ile B açıktır. Ayrıca, bağlantısız iki küme kesişmediğine göre, A ile B istenen koşulları sağlar.

(c) ⇒ (d) : Boş olmayan A ile B kesişmeyen iki açık küme ve $X = A \cup B$ ise $A' = B$ ve $B' = A$ olacağından, A ile B aynı zamanda kapalı iki küme olacaktır.

(d) $\Rightarrow$ (e) : Boş olmayan A ile B kesişmeyen iki kapalı küme ve $X = A \cup B$ ise, $A = B'$ kümesi hem açık hem kapalı ve boş olmayan has bir alt kümedir.

(e) $\Rightarrow$ (a) : X uzayının, boş olmayan hem açık hem kapalı has bir alt-kümesi var olsun. Bu kümeye A diyelim. Bu durumda $B = A' \neq \emptyset$ kümesi de hem açık hem kapalı has bir alt-küme olur ve

$$X = A \cup B, \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$$

koşulunu sağlar. O halde, tanım sağlanmadığı için, X uzayı bağlantılı değildir.

Örnek 16.2.1. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, salt topolojiye göre, bağlantısız bir uzaydır.

Bunu görmek için, örneğin, $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısından küçük olan bütün rasyonel sayıların oluşturduğu kümenin $\mathbb{Q}$ içinde hem açık hem kapalı bir altküme olduğunu görmek yetecektir.

Önerme 16.2.1. *Bir topolojik uzayın bağlantılı bir uzay olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, boş olmayan her has alt kümesinin kenarının boş olmamasıdır.*

İSPAT:
Gerekliği: Uzay bağlantılı olsun ve A kümesi boş olmayan herhangi bir has altküme olarak alınsın. Eğer ∂A kenarı boş olsaydı $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = A^\circ$ olacaktı. Oysa $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$ olduğundan, bu eşitlik $A^\circ = A = \bar{A}$ olmasını, yani A kümesinin hem açık hem kapalı olmasını gerektirirdi. Bu ise, *Teorem* 16.2.1(e) uyarınca, uzayın bağlantılı olduğu varsayımıyla çelişir. O halde A kümesinin kenarı boş olamaz.
Yeterliği: $\partial A \neq \emptyset$ ise $\partial A = \bar{A} - A^\circ$ eşitliğinden $\bar{A} \neq A^\circ$ çıkar. Demek ki A kümesi hem açık hem kapalı olamaz. Her altküme için bu özelik varolduğuna göre, *Teorem* 16.2.1(e) uyarınca, uzay bağlantılıdır.

Örnek 16.2.2. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, sonlu tümleyenler topolojisine göre, bağlantılı bir uzaydır.

A kümesi $\mathbb{N}$ nin boş olmayan has bir alt-kümesi olsun. Bu uzayın kapalı alt-kümeleri sonlu alt-kümeleri ile $\mathbb{N}$ nin kendisinden ibarettir. Buna göre;

Durum 1: Eğer A sonlu ise $\bar{A} = A$ ve $A^\circ = \emptyset$ olmak zorundadır. Neden? O halde $\partial A = \bar{A} - A^\circ = \bar{A} = A$ olacaktır.

Durum 2: Eğer A sonsuz ise $\bar{A} = \mathbb{N}$ ve $A^\circ = A$ olmak zorundadır. Neden? O halde $\partial A = \mathbb{N} - A = A' \neq \emptyset$ olacaktır.

Demek ki, *Önerme* 16.2.1 uyarınca bu uzay bağlantılıdır.

16.2.1 Problemler

1. Sonsuz bir küme üzerinde sonlu tümleyenler topolojisine göre uzayın bağlantılı olup olmadığını gösteriniz.

2. Sayılamayan sonsuz bir küme üzerinde sayılabilir tümleyenler topolojisine göre uzayın bağlantılı olup olmadığını gösteriniz.

3. Gerçel eksenin $(0,1)$, $[0,1)$ ve $(0,1]$ alt uzaylarının birbirleriyle eşyapılı (homeomorphic) olamayacağını gösteriniz.

4. $\mathbb{R}^n$ uzayının $\mathbb{R}$ uzayına eşyapılı (homeomorphic) olmadığını gösteriniz. $f : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu sürekli ise, bir sabit noktasının olduğunu; yani $f(x) = x$ olan bir $x \in [0,1]$ olduğunu gösteriniz. $[0,1]$ kapalı aralığı yerine $[0,1)$ ya da $(0,1]$ yarı-açık aralıkları konulursa ne olur?

16.3 BAĞLANTILI KÜME

Tanım 16.3.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı ile bir $A \subset X$ altkümesi verilsin. Eğer $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayı bağlantılı ise, A kümesine (X uzayı içinde) bağlantılı bir kümedir, denilir.

Önerme 16.3.1. *Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının bir A alt-kümesinin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$A \subset M \cup N, \quad A \cap M \neq \emptyset, \quad A \cap N \neq \emptyset$$

özelliklerine sahip her $M, N \in \mathscr{T}$ için

$$A \cap M \cap N \neq \emptyset$$

olmasıdır.

İSPAT: Hipotezden

$$A = A \cap (M \cup N) = (A \cap M) \cup (A \cap N) \tag{16.3}$$
$$A \cap M \cap N = (A \cap M) \cap (A \cap N) \tag{16.4}$$

yazabiliriz. Tabii, burada $A \cap M \in \mathscr{T}_A$ ve $A \cap N \in \mathscr{T}_A$ olur. Eğer A kümesi bağlantılı ise $A \cap M \cap N = \emptyset$ olamaz, çünkü bu küme boş olsaydı, (16.3) ve (16.4) eşitlikleri uyarınca, $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayı bağlantılı olamazdı.

Tersine olarak, verilen özelliklere sahip her $M, N \in \mathscr{T}$ için $A \cap M \cap N \neq \emptyset$ olması demek, (16.3) eşitliği uyarınca, $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayının bağlantılı olması demektir (bkz. *Teorem* 16.2.1(c)).

Önerme 16.3.2. *Boş olmayan bağlantılı kümelerden oluşan bir ailenin arakesiti boş değilse, bu ailenin bileşimi de bağlantılıdır.*

İSPAT: Verilen özelliklere sahip bir $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ailesi düşünelim. Arakesit boş olmadığına göre, bağlantılı her A_λ kümesinin içerdiği bir x öğesi vardır. Eğer

$$A = \{\cup A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

bileşimi bağlantılı bir küme olmasaydı, *Önerme* 16.3.1 uyarınca $M \cap A \neq \emptyset, N \cap A \neq \emptyset, A \subset M \cup N$ ve $A \cap M \cap N = \emptyset$ olacak şekilde açık M, N kümeleri var olurdu. Bu durumda, $x \in M \cup N$ olur. $x \in M$ diyelim. Öte yandan, enaz bir $\mu \in \Lambda$ için $A_\mu \cap N \neq \emptyset$ olmak zorundadır; değilse $N \cap A = \emptyset$ olurdu. Demek ki

$$\begin{aligned} M \cup N &\supset A_\mu \\ A_\mu \cap M \cap N &= \emptyset \\ M \cap A_\mu &\neq \emptyset \\ N \cap A_\mu &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olacaktır. Bu durum A_μ kümesinin bağlantılılığı ile çelişir. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. O halde A bağlantılıdır.

Sonuç 16.3.1. *Bağlantılı kümelerden oluşan bir* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *kümeler dizisi verilsin. Eğer her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ *ise* $\cup_n A_n$ *bileşimi de bağlantılı bir kümedir.*

İSPAT: Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$ bileşiminin bağlantılı olduğu görülür. Öte yandan, $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, yukarıdaki önermenin varsayımlarını sağlar. O halde $\cup_n B_n$ bileşimi bağlantılı bir küme olacaktır. Oysa, bu bileşim, $\cup_n A_n$ bileşimine eşittir.

Önerme 16.3.3. *Bir X uzayının bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x, y \in X$ öğe çiftini içeren bağlantılı bir kümenin varlığıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: Uzay bağlantılı ise, her nokta çiftini içeren bağlantılı küme olarak X uzayının kendisi alınabilir.

Yeterliği: Sabit bir $x \in X$ seçelim. Varsayım uyarınca, her $y \in X$ için, x ve y öğelerini içeren bir $B(x, y)$ bağlantılı alt-kümesi vardır. $\{B(x, y) \,|\, y \in X\}$ ailesi boş olmayan bağlantılı kümelerden oluşan ve arakesiti boş olmayan (çünkü, enaz x öğesini içerir) bir ailedir. *Önerme* 16.3.2 uyarınca, bu ailenin bileşimi olan X uzayı bağlantılıdır.

Önerme 16.3.4. *Bağlantılı yoğun bir alt kümeye sahip olan her uzay bağlantılıdır.*

İSPAT: Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının yoğun bir A altkümesi bağlantılı bir küme olsun. Eğer X uzayı bağlantılı değilse, $X = M \cup N$ ve $M \cap N = \emptyset$ olacak şekilde $M, N \in \mathscr{T}$ kümeleri varolacaktır. Bu durumda, A yoğun olduğundan, $A \cap M$ ile $A \cap N$ kümeleri boş olamaz. Ayrıca bu iki küme $\mathscr{T}_A$ topolojisine aittir, kesişmezler ve bileşimleri A kümesine eşittir. Dolayısıyla, $(A, \mathscr{T}_A)$ altuzayı bağlantılı olamaz. Bu ise, A kümesinin bağlantılılığı ile çelişir.

Sonuç 16.3.2. *Bağlantılı bir kümenin kaplamı da bağlantılıdır.*

Önerme 16.3.5. *A bağlantılı bir küme ise, $A \subset B \subset \bar{A}$ koşulunu sağlayan her B kümesi de bağlantılıdır.*

İspat için A kümesinin B içinde yoğun olduğunu düşünmek yetecektir.

Önerme 16.3.6. *Bir topolojik uzayda A herhangi bir küme ve B bağlantılı bir küme olsun. Eğer B kümesi hem A ile hem de A' ile kesişiyorsa, A nın kenarı ile de kesişir.*

İSPAT: Eğer $B \cap \partial A = \emptyset$ olsaydı, uzayı X ile gösterirsek,

$$X = A^\circ \cup (A')^o \cup \partial A$$

olduğundan

$$A^\circ \cup (A')^o \supset B$$
$$B \cap A^\circ \neq \emptyset$$
$$B \cap (A')^o \neq \emptyset$$

olacaktı. Ama $B \cap A^\circ \cap (A')^o = \emptyset$ olur. Bu durum, *Önerme* 16.3.1 uyarınca B kümesinin bağlantılılığı ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır, yani $B \cap \partial A \neq \emptyset$ olmalıdır.

16.4 BAĞLANTILILIĞIN KORUNUMU

SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE BAĞLANTILILIK

Tıkızlık, nasıl sürekli fonksiyonlar altında korunuyorsa bağlantılılık da korunur.

Önerme 16.4.1. *Bağlantılı bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki resmi de bağlantılıdır.*

İSPAT: $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. X uzayı bağlantılı olduğu halde Y uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda, Y uzayının $Y = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde boş olmayan, açık A, B alt-kümeleri vardır. (bkz. *Teorem* 16.2.1(c)). Öyleyse $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri X içinde açık ve kesişmeyen iki kümedir. Ayrıca bu iki kümenin bileşimi X uzayına eşittir ve f örten olduğundan, hiçbirisi boş olamaz. Bu özellikler X uzayının bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde Y uzayı bağlantılı olmalıdır.

Uyarı 16.4.1. Bağlantılı bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki ters resminin bağlantılı olması gerekmez.

Örneğin, ayrık bir uzaydan tek öğeli bir uzaya tanımlı fonksiyonu düşününüz.

Önerme 16.4.2. *Bir X uzayının bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, bu uzaydan $Y = \{0, 1\}$ ayrık topolojik uzayına sürekli ve örten hiçbir fonksiyonun var olmamasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: X uzayı bağlantılı olsun. Eğer X uzayından Y uzayına sürekli ve örten bir fonksiyon olsaydı, yukarıdaki *Uyarı* gereğince, Y uzayının da bağlantılı olması gerekirdi. Oysa Y ayrık uzayının bağlantılı olmadığını biliyoruz. Bu çelişki olamayacağına göre, kabulümüz yanlıştır, yani X den Y ye sürekli ve örten hiçbir fonksiyon yoktur.

Yeterliği: X uzayından Y uzayına sürekli ve örten hiçbir fonksiyon varolmasın. Bu durumda, eğer X bağlantılı olmasaydı, $X = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde boş olmayan açık A, B kümeleri varolurdu. Şimdi X den Y ye bir f fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

diye tanımlayalım. Bu fonksiyonun sürekli ve örten olduğu apaçıktır. Bu ise, varsayımımızla çelişir. O halde X uzayı bağlantılı olmalıdır.

16.5 BÖLÜM UZAYLARININ BAĞLANTILILIĞI

Teorem 16.5.1. *Bağlantılı bir uzayın her bölüm uzayı da bağlantılı bir uzaydır.*

İSPAT: X bağlantılı bir uzay, β bağıntısı X üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. X den X/β bölüm uzayı üzerine tanımlanan bölüm dönüşümü sürekli olduğundan (bkz. *Önerme* 10.1.2), istenen şey *Önerme* 16.4.1 den çıkar.

Bu teoremin karşıtı yoktur, ama aşağıdaki özelik vardır.

Önerme 16.5.1. *X bir topolojik uzay ve β bağıntısına göre denklik sınıflarının her birisi bağlantılı birer küme ise X uzayı da bağlantılı olur.*

İSPAT: X uzayı bağlantılı olmasaydı, $X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde açık A ve B kümeleri var olacaktı. β bağıntısına göre A ve B kümeleri doymuş iki kümedir, çünkü bir $x \in A$ için $[x] \cap B \neq \emptyset$ olsaydı $[x]$ kümesi, $[x]$ altuzayında açık ve birbirlerinden ayrık olan $[x] \cap A$ ile $[x] \cap B$ kümelerinin bileşimine eşit olacağından, $[x]$ denklik sınıfı bağlantılı olamazdı. Bu çelişki olamayacağına göre, A ile B doymuş iki kümedir. O halde, *Önerme* 10.1.5 uyarınca, φ bölüm dönüşümü altında bu iki kümenin $\varphi(A)$ ve $\varphi(B)$ resimleri açıktır. Ayrıca bu iki küme kesişmez. Boş değildirler ve bileşimleri X/β ya eşittir. Bu ise X/β bölüm uzayının bağlantılı oluşuna aykırıdır. Bu çelişki olamayacağına göre, X uzayı bağlantılıdır.

16.5.1 Problem

1. $\varphi : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. Y bağlantılı ve her $y \in Y$ için $\varphi^1(y) \subset X$ bağlantılı ise, X uzayının da bağlantılı olduğunu gösteriniz.

16.6 ÇARPIM UZAYLARIN BAĞLANTILILIĞI

Teorem 16.6.1. *Bir çarpım uzayın bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul çarpan uzayların her birisinin bağlantılı olmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: Çarpım uzay bağlantılı ise sürekli izdüşüm fonksiyonları altındaki resimleri olan çarpan uzayların herbirisi de bağlantılı birer uzay olacaktır (bkz. *Önerme* 16.4.1).

Yeterliği: $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ailesi boş olmayan bağlantılı uzaylardan oluşan boş olmayan bir aile olsun. Bunların çarpım uzayını X ile gösterelim. Olmayan ergi yöntemini uygulamak için X çarpım uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda, *Önerme* 16.4.2 uyarınca, X uzayından $\{0, 1\}$ ayrık uzayı üzerine sürekli bir f fonksiyonu var olacaktır. X içinde sabit bir $a = (a_\lambda)$ noktası seçelim. Sonra herhangi bir $\mu \in \Lambda$ damgasını ele alalım ve X_μ çarpan uzayından X çarpım uzayına bir h_μ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$y_\lambda = \begin{cases} a_\lambda, & \lambda \neq \mu \\ x_\lambda, & \lambda = \mu \end{cases}$$

olmak üzere

$$h_\mu(x_\mu) = (y_\lambda), \lambda \in \Lambda$$

olsun. Bu fonksiyonun sürekli olacağı apaçıktır. Öyleyse, X_μ çarpan uzayından $\{0, 1\}$ ayrık uzayına tanımlı olan foh_μ bileşkesi sürekli olacaktır. X_μ bağlantılı olduğuna göre, *Önerme* 16.4.1 uyarınca, foh_μ bileşkesi örten bir fonksiyon olamaz, ki bu foh_μ bileşkesinin değer bölgesinin 0 ya da 1 den yalnız birisi olmasını gerektirir. Demek ki her $x_\mu \in X_\mu$ için

$$foh_\mu(x_\mu) = f(a)$$

dır.

Buradan şu sonuç çıkar: Bir $(x_\lambda) = x \in X$ öğesi verildiğinde, eğer seçilen μ damgasından farklı her $\lambda \in \Lambda$ için $x_\lambda = a_\lambda$ ise $f(x) = f(a)$ olur. μ yerine değişik μ_i damgaları seçerek sonlu tane

$$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

için yukarıdaki işi tekrarlayabiliriz. Böylece $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ damgalarından farklı her $\lambda \in \Lambda$ için $x_\lambda = a_\lambda$ koşulunu sağlayan her $(x_\lambda) = x \in X$ öğesi için

$$f(x) = f(a)$$

olacağını söyleyebiliriz. Oysa bu koşulu sağlayan x öğelerinin oluşturduğu küme X içinde yoğundur. Neden? Demek ki X üzerinde sürekli olan f fonksiyonu X uzayının yoğun bir alt-kümesi üzerinde sabit $f(a)$ değerini almaktadır. Öyleyse f fonksiyonu bütün X üzerinde sabit $f(a)$ değerini almak zorundadır. Neden? Oysa f fonksiyonu $\{0, 1\}$ ayrık uzayını örtecek biçimde seçmiştik. Bu çelişki, X çarpım uzayını bağlantılı varsaymayışımızdan doğmuştur. Demek ki X bağlantılı bir uzaydır.

16.7 GERÇEL EKSENİN BAĞLANTILILIĞI

Teorem 16.7.1. *$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin herhangi bir E alt-kümenin salt topolojiye göre bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, bu kümenin bir aralık olmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: E bağlantılı olsun. Eğer E tek öğeden oluşan bir küme ise bir aralıktır. Şimdi E kümesinin birden çok öğesinin olduğunu varsayalım. $a < b$ olacak şekildeki her $a, b \in E$ için $a < x < b$ koşulunu sağlayan $x \in \mathbb{R}$ öğesinin E kümesine ait olduğunu göstermek yetecektir. Eğer $x \notin E$ olsaydı

$$E \subset \{x\}' = (-\infty, x) \cap (x, \infty)$$

olurdu, yani E kümesi birbirlerinden ayrık ve açık iki küme tarafından örtülüyor ve her ikisiyle de kesişiyor olurdu. Bu ise E kümesinin bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde $x \in E$ olmalıdır.

Yeterliği: E kümesi $\mathbb{R}$ içinde bir aralık olsun. E kümesinin bağlantılı olmadığını varsayalım. O halde, salt topolojiye göre, E kümesi açık (ya da kapalı) olan birbirlerinden ayrık ve boş olmayan iki kümenin birleşimine eşittir. Bu kümelere A ve B diyelim. Herhangi bir $a \in A$ ile herhangi bir $b \in B$ öğesini seçelim. Kümeler kesişmediğine göre $a \neq b$ olacaktır. $a < b$ olduğunu varsayabiliriz, değilse kümelerin adlarını değiştirmek yetecektir. $A \cap [a, b]$ kümesi boş değildir; çünkü a öğesini içerir. Ayrıca b öğesi bu kümenin bir üst sınırıdır. Gerçel sayılar kümesinin *sıraca tam* olduğunu; yani, üstten sınırlı ve boş olmayan her gerçel sayı kümesinin üst sınırlarının en küçüğünün (*eküs, sup, supremum*) var olduğunu biliyoruz (bkz. [1] , [22], [23], [6]). O halde

$$c = \sup\{A \cap [a, b]\}$$

vardır ve $c \in \bar{A}$ dır (kaplama $\mathbb{R}$ içinde yapılıyor). Ayrıca $a \leq c \leq b$ ve E bir aralık olduğundan $c \in E$ dir. Demek ki $c \in E \cap \bar{A}$ olur. Oysa bu son küme A kümesinin E içindeki kaplamından başka bir şey değildir. Ayrıca A kümesi E içinde kapalı olduğundan $E \cap \bar{A} = A$ olacaktır. Demek ki $c \in A$ dır.

A kümesi aynı zamanda E içinde açık olduğundan c öğesinin A tarafından kapsanan bir komşuluğu vardır. O halde,

$$x < z < b \quad ve \quad c \in (x, z) \cap E \subset A$$

olacak şekilde $x, z \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi bir $t \in (c, z)$ seçelim. $c, b \in E$ ve E bir aralık olduğundan $t \in E$ dir O halde $t \in (x, z) \cap E$ olacaktır. Demek ki $t \in A$ dır. Oysa $c < t$ ve c öğesi $A \cap [a, b]$ kümesinin $\mathbb{R}$ içinde bir üst sınırı olduğundan $t \notin A$ dır. Böylece, E aralığının bağlantılı olmadığını varsaydığımızda bir çelişkiye varmış oluyoruz. Demek ki her aralık bağlantılı bir kümedir.

Sonuç 16.7.1. *Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi bağlantılı bir uzaydır.*

İSPAT: Her açık aralığın $\mathbb{R}$ ye eş yapılı olduğunu ve bağlantılı bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki resminin de bağlantılı olduğunu düşünmek yetecektir.

Sonuç 16.7.2. $\mathbb{R}^n$ *ve* $\mathbb{C}^n$ $\quad (n \geq 1)$ *Öklit uzayları bağlantılıdır.*

İSPAT: bağlantılı uzayların çarpım uzayı bağlantılı olduğundan $\mathbb{R}^n$ uzayının bağlantılı olacağı apaçıktır. Öte yandan, $\mathbb{C}^n$ karmaşık Öklit uzayı $\mathbb{R}^{2n}$ gerçel Öklit uzayı ile eşyapılıdır, dolayısıyla o da bağlantılı bir uzaydır.

Özel olarak $\mathbb{R}^2$ düzleminin ya da buna eşyapılı olan $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar uzayının bağlantılı olduğu ortaya çıkar.

Sonuç 16.7.3. *Aşağıdaki özelikler sağlanır:*

(a) $\mathbb{R}^2$ içindeki her çember bağlantılı bir kümedir.

(b) $\mathbb{R}^3$ içindeki her silindir bağlantılıdır.

(c) $\mathbb{R}^3$ içindeki her simit yüzeyi (tor) bağlantılıdır.

İSPAT: Bu kümelerin herbirisinin $[0, 1]$ bağlantılı uzayının birer bölüm uzayına eşyapılı olduğunu düşünmek yetecektir.

Önerme 16.7.1. *Öklit uzayındaki her dışbükey küme bağlantılıdır.*

İSPAT: $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$ uzayında bir A alt-kümesinin dışbükey bir küme olması demek, her $x, y \in A$ için bu iki noktayı birleştiren $D(x, y)$ doğru parçasının A tarafından kapsanıyor olması demektir. Öte yandan, $\mathbb{R}^n$ içindeki her $D(x, y)$ doğru parçası $\mathbb{R}$ içinde kapalı bir aralığa eşyapılı olduğundan, *Teorem* 16.7.1 uyarınca bağlantılıdır. Öyleyse, istenen sonuç önceki önermeden çıkar.

Bu önermenin karşıtı doğru değildir, yani bir Öklit uzayında bağlantılı her kümenin dışbükey olması gerekmez. Örneğin, düzlemdeki her disk dışbükeydir, dolayısıyla bağlantılı bir kümedir. Ama bu disklerin kenarları olan çemberler dışbükey birer küme değildir. Oysa, her çemberin birim çembere eşyapılı olduğu apaçıktır ve birim çemberin ise $[0, 2\pi]$ kapalı aralığının bir bölüm uzayı olduğunu biliyoruz (bkz. *Örnek* 10.1.1). O halde, *Teorem* 16.5.1 uyarınca, her çember bağlantılıdır.

Önerme 16.7.2. *Gerçel eksenin bir alt-kümesinin tıkız ve bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, kapalı bir aralık olmasıdır.*

Gerekliği: Gerçel eksenin tıkız ve bağlantılı bir alt-kümesi E olsun. Bağlantılı oluşu, *Teorem* 16.7.1 uyarınca, E nin bir aralık olmasını gerektirir. Öte yandan, gerçel eksenin her tıkız alt-kümesinin *en küçük (min)* ve *en büyük (max)* öğeleri vardır. Oysa, en küçük ve en büyük öğeleri var olan her aralık kapalı bir aralıktır.

Yeterliği: E kapalı bir aralık ise, bunun bağlantılı oluşu *Teorem* 16.7.1 den, tıkız oluşu ise klasik *Heine-Borel* teoreminden çıkar (bkz. [22]).

Sonuç 16.7.4. $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$ *uzayındaki bir A alt-kümesinin tıkız ve bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, A kümesinin $\{\pi_i(A) \mid (1 \leq i \leq n)\}$ izdüşümlerinin $\mathbb{R}$ içinde kapalı birer aralık olmasıdır.*

İSPAT: $\pi_i(A) = A_i$ olmak üzere $A = \Pi_{i=n}^{n} A_i$ dir. *Tychonoff Teoremi* gereğince, A kümesinin $\mathbb{R}^n$ içinde tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul A_i kümelerinin $\mathbb{R}$ içinde tıkız olmalıdır. `Teorem` 16.6.1 uyarınca, A kümesinin $\mathbb{R}^n$ içinde bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul A_i kümelerinin $\mathbb{R}$ içinde bağlantılı olmalarıdır. *Önerme* 16.7.2 uyarınca, A_i kümelerinin $\mathbb{R}$ içinde tıkız ve bağlantılı olmaları için gerekli ve yeterli koşul kapalı birer aralık olmalarıdır.

Teorem 16.7.2 (Ara Değer Teoremi)**.** *X bağlantılı bir uzay olsun ve bir $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. $a, b \in X$ için $f(a) < y < f(b)$ ise, $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ öğesi vardır.*

İSPAT: *Teorem* 16.4.1 uyarınca $f(X)$ resmi $\mathbb{R}$ nin bağlantılı bir alt kümesidir. O halde, *Teorem* 16.7.1 göre $f(X)$ bir aralıktır. $f(a), f(b) \in f(X)$ olduğundan $[f(a), f(b)] \subset f(X)$ olacaktır. Bu ise, $y \in f(X)$ olmasını gerektirir. Demek ki $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ öğesi vardır.

Sonuç 16.7.5. *X bağlantılı bir uzay olsun ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $a, b \in X$ ve $f(a) < 0, f(b) > 0$ ise $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in X$ öğesi vardır.*

Bunu görmek için, yukarıdaki teoremde $y = 0$ almak yetecektir.

Teorem 16.7.3. *(Sabit Nokta Teoremi) $f : [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir fonksiyon ise, f fonksiyonunun bir sabit noktası vardır.*

İSPAT: $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ öğesinin varlığını göstermek için $[a, b]$ den $\mathbb{R}$ ye bir g fonksiyonunu $g(x) = x - f(x), x \in [a, b]$ diye tanımlayalım. Eğer $f(a) = a$ ya da $f(b) = b$ ise, sırasıyla, a ya da b aradığımız öğe olur. Eğer $f(a) \neq a$ ve $f(b) \neq b$ ise, f nin değer bölgesi $[a, b]$ olduğundan

$$g(a) = a - f(a) < 0 \quad ve \quad g(b) = b - f(b) > 0$$

olacaktır. Buradan, yukarıdaki sonuç uyarınca, $g(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ noktasının varlığı çıkar, ki bu istediğimiz $f(c) = c$ eşitliğini sağlar.

16.7.1 Problemler

1. Bir noktası atılan bir çember bağlantılı mıdır? İki noktası atılan bir çember bağlantılı mıdır?

2. A ile B bağlantılı iki küme olduğu halde

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \partial A, \quad A^\circ$$

kümeleri bağlantılı olmayabilir. Bunlara birer örnek veriniz.

3. Bağlantılılığın kalıtım özelliği yoktur, yani bağlantılı bir uzayın her alt uzayı da bağlantılı olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösteriniz.

4. İrrasyonel sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ içinde bağlantılı olmadığını gösteriniz.

5. $\{x \mid (x = 0) \vee (x = 1/n), \quad n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ içinde bağlantılı olmadığını gösteriniz.

6. Bağlantılı bir X uzayından $\mathbb{R}$ ye sürekli bir fonksiyon varsa, X kümesinin sayılamayan sonsuz bir küme olduğunu gösteriniz.

16.8 BİR UZAYIN BİLEŞENLERİ

Bir topolojik uzay bağlantılı değilse, bunu en büyük bağlantılı alt uzaylarına ayırmak kullanışlı olmaktadır. Eğer bağlantılı bir alt-uzayı kapsayan daha büyük bağlantılı bir alt uzay yoksa, bu alt uzaya verilen uzayın bir *bileşenidir*, diyeceğiz. Bağlantılı bir uzayın bir tek bileşeni vardır, o da kendisidir. Ayrık bir topolojik uzayın her noktası bir bileşendir. Ama her noktası bir bileşen olan bir topolojik uzayın ayrık bir uzay olması gerekmez. Örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerine mutlak değer topolojisini koyalım. Bu topolojiye göre her rasyonel sayı uzayın bir bileşenidir (Neden?) Ama bu uzay ayrık bir uzay değildir. Salt topolojiye göre her rasyonel sayı kapalı bir küme oluşturur; tek öğeli bu küme hem açık hem kapalıdır. Demek ki bir uzayın bileşenlerini bilmek o uzayın bütününün yapısını bilmeye yetmeyecektir.

Tanım 16.8.1. Bir topolojik uzayın bir x öğesini içeren bileşenine x öğesinin bileşeni diyecek ve bunu B_x simgesiyle göstereceğiz.

Bu tanımın anlamlı olabilmesi için bir uzayın her öğesini içeren bir ve yalnızca bir bileşen göstermeliyiz. Uzayın her x öğesi için $\{\mathrm{x}\}$ kümesinin bağlantılı bir küme olacağı apaçıktır. O halde x öğesini içeren bağlantılı kümeler ailesi boş değildir. Bu ailenin arakesiti x öğesini içerdiğine göre, ailenin arakesiti de boş değildir. Öyleyse, *Önerme* 16.3.2 uyarınca, bu ailenin bileşimi bağlantılı bir kümedir. Bu bağlantılı kümenin x öğesini içeren en büyük bağlantılı küme olacağı, yani x öğesinin bir bileşeni olacağı apaçıktır. Öte yandan bir öğenin bileşeninin tekliğini görmek kolaydır. Gerçekten, A ile B bir x öğesinin iki bileşeni ise, A kümesi x öğesini içeren bağlantılı bir küme ve B bu öğenin bileşeni olduğundan, tanım uyarınca, $A \subset B$ yazılabilir. Sonra A ile B kümelerinin rollerini değiştirirsek $B \subset A$ olacaktır. Demek ki $A = B$ dir. Böylece aşağıdaki özelikleri ispatlamış oluyoruz.

Önerme 16.8.1. *Bir topolojik uzayın her öğesinin bir ve yalnızca bir tane bileşeni vardır.*

Önerme 16.8.2. *Bir topolojik uzayın bileşenleri o uzayın bir ayrışımını oluşturur.*

Önerme 16.8.3. *Bir uzayın bağlantılı her alt kümesi o uzayın bir bileşeni tarafından kapsanır.*

Her rasyonel sayının, hem ayrık topolojiye ve hem de salt topolojiye göre bir bileşen olduğunu, ama bu bileşenlerin birinci topolojiye göre açık olduğu halde ikinci topolojiye göre açık olmadıklarını söylemiştik. Demek ki bir topolojik uzayın bileşenlerinin açık birer küme olmaları gerekmiyor. Buna karşın şu özelik vardır:

Önerme 16.8.4. *Bir topolojik uzayın bileşenleri kapalıdır.*

İSPAT: A bir bileşen ise, A bağlantılı bir kümedir ve bunu kapsayan daha büyük bağlantılı bir küme yoktur. Oysa *Sonuç* 16.3.2 uyarınca, $\bar{A}$ bağlantılıdır ve A yı kapsar. O halde $A = \bar{A}$ olmalıdır.

Önerme 16.8.5. *Bir topolojik uzayın hem açık hem kapalı olan bağlantılı alt kümesi, bu uzayın bir bileşenidir.*

İSPAT: A kümesi hem açık hem kapalı ve bağlantılı bir altküme olsun. Yukarıdaki sonuç uyarınca, A kümesi bir B bileşeni tarafından kapsanır. Eğer A kümesi B bileşeninin has bir altkümesi ise

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

olacaktır. Öyleyse, B kümesi bağlantılı olamaz. Bu çelişkiden $A = B$ çıkar.

16.8.1 Problemler

1. Bir uzayın bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul bir tek bileşeninin olmasıdır. Gösteriniz.
2. Bir uzayın sonlu sayıda bileşeni varsa, bu bileşenlerin her birisi hem açık hem kapalıdır. Ancak sonsuz bileşen varsa, bileşenlerin açık olması gerekmez. Bir örnekle doğrulayınız.

16.9 TAMAMEN BAĞLANTISIZ UZAYLAR

Tanım 16.9.1. Bir topolojik uzayın her x öğesinin bileşeni yalnızca $\{x\}$ kümesinden ibaret ise, bu uzaya tamamen bağlantısız bir uzaydır, denilir.

Eğer bir A alt uzayı tamamen bağlantısız bir uzay ise, A alt-kümesine tamamen bağlantısız bir kümedir, denir.

Bileşenler kapalı olduğundan, tamamen bağlantısız bir uzayın her öğesi kapalı bir küme oluşturur. O halde tamamen bağlantısız her uzay bir T_1 uzayıdır.

Her ayrık uzay tamamen bağlantısızdır. Ama tamamen bağlantısız her uzayın ayrık olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örneklerle gösterebiliriz.

Örnek 16.9.1. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, salt topolojiye göre, tamamen bağlantısız bir uzaydır, ama bu uzay ayrık değildir. Neden?

Örnek 16.9.2.

$$A = \{x : x = 0 \quad ya \quad da \quad x = 1/n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi, üzerindeki salt topolojiye göre tamamen bağlantısızdır. Ama $\{0\}$ alt kümesi bu uzayda açık bir küme olmadığından, A ayrık bir uzay olmaz.

16.10 YEREL BAĞLANTILI UZAYLAR

Tıkızlık kavramını nasıl yerelleştirerek yerel tıkız uzay kavramını getirdiysek, benzer işi bağlantılılık kavramı için de yaparak yerel bağlantılılık kavramını getireceğiz.

Tanım 16.10.1. Bir topolojik uzayın her noktasının bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı varsa, bu uzaya *yerel bağlantılı* uzaydır, denilir.

Önerme 16.10.1. *Bir X uzayının yerel bağlantılı bir uzay olması için gerekli ve yeterli koşul her x öğesinin her V komşuluğunun, bağlantılı bir B komşuluğu kapsamasıdır.*

Örnek 16.10.1. Ayrık bir topolojik uzayın her x öğesine karşılık $\{\{x\}\}$ ailesi, yani yalnızca $\{x\}$ kümesinden oluşan aile, x öğesinin bir komşuluklar tabanıdır.

Ohalde her ayrık uzay yerel bağlantılıdır. Aynı düşünüşle, tamamen ayrılmış her uzayın da yerel bağlantılı olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 16.10.2. $\mathbb{R}$ *yerel bağlantılıdır.*

İSPAT: Gerçekten her $x \in \mathbb{R}$ noktası için, bu noktayı içeren bütün açık aralıkların ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Her aralığın bağlantılı olduğu da bilindiğine göre, ispat biter.

Örnek 16.10.2. Aşağıdaki iki kümenin bileşimi $\mathbb{R}^2$ içinde bağlantılıdır. Ama yerel bağlantılı değildir.

$$A = \{(0,y) : c \leq y \leq 1, \quad c \geq -1\} \tag{16.5}$$
$$B = \{(x,y) : y = \sin(1/x), 0 < x\} \cup \{(0,0)\} \tag{16.6}$$

İSPAT: A kümesinin her öğesi B kümesinin bir yığılma noktasıdır. Gerçekten A kümesine ait her a noktasının her U komşuluğu B ile kesişir. O halde $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ olur, yani A ile B kümeleri bağlantılı iki kümedir. Bu demektir ki $X = A \cup B$ kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde bağlantılı bir kümedir.

Ancak X kümesi yerel bağlantılı değildir. Çünkü $a \in A$ noktasının herhangi bir $\varepsilon > 0$ yarıçaplı disk komşuluğu bağlantılı hiçbir komşuluğunu kapsamaz, çünkü bu komşuluğun, sonsuz çoklukta bileşenleri vardır. (Şekil çizerek görünüz.) Böylece aşağıdaki önermeyi ispatlamış oluyoruz.

Önerme 16.10.3. *Bağlantılı bir uzay yerel bağlantılı olmayabilir.*

Teorem 16.10.1. *Bir X uzayı için aşağıdaki özellikler birbirine denktir:*

(a) X uzayı yerel bağlantılıdır.

(b) $E \subset X$ açık bir küme ve C kümesi E alt uzayının bir bileşeni ise $\partial C \subset \partial E$ dir.

(c) X uzayının açık her alt uzayının bileşenleri X içinde açıktır.

İSPAT:

1. $[(a) \Rightarrow (b)]$ $x \in \partial C$ ise $x \in \bar{C} \subset E$ ve $\bar{E} = E^o \cup 0\partial E$ olacağından, eğer $x \notin \partial E$ olsaydı $x \in E^o$ olurdu. X uzayı yerel bağlantılı olduğundan, bağlantılı öyle bir $U \notin \mathfrak{B}(x)$ vardır ki $x \in U \subset E^o \subset E$ olur. Buradan $C \cap U \neq \emptyset$ çıkar (çünkü $x \in \partial C$ ve $x \in U$ dur.) Demek ki $C \cup U$ kümesi E nin bağlantılı bir alt kümesidir. Oysa C kümesi, E alt uzayının bir bileşeni idi. Öyleyse $C \cup U = C$, yani $U \subset C$ ve dolayısıyla $x \in C^o$ olur. Bu ise $C^o \cap \partial C = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde, $x \notin E^o$ dir. Öyleyse, $x \in \partial E$ olmalıdır. Bu ise $\partial C \subset \partial E$ olması demektir.

2. $[(b) \Rightarrow (c)]$ İspat alıştırma için okura bırakılmıştır.

3. $[(c) \Rightarrow (a)]$ İspat alıştırma için okura bırakılmıştır.

16.10.1 Problemler

1. Tıkız ve yerel bağlantılı bir uzayın ancak sonlu sayıda bileşenleri vardır.

2. Sürekli ve açık fonksiyonlar yerel bağlantılılığı korurlar.

3. Yerel bağlantılı uzayların boş olmayan sonlu bir ailesının kartezyen çarpımı da yerel bağlantılıdır.

4. Yerel bağlantılı uzayların boş olmayan keyfi bir ailesinin kartezyen çarpımı yerel bağlantılı olmayabilir. (*Yol Gösterme: İki öğeli bütün ayrık uzayların kartezyen çarpımını düşününüz.*)

5. Hem bağlantılı, hem yerel bağlantılı olan uzayların boş olmayan bir ailesinin kartezyen çarpımı yerel bağlantılı olur.

6. Boş olmayan yerel bağlantılı uzaylardan oluşan bir ailenin sonlu sayıdası dışındakiler bağlantılı ise, kartezyen çarpımları yerel bağlantılı olur.

7. Rasyonel sayılar kümesi, salt topolojiye göre, yerel bağlantılı değildir.

8. $\mathbb{R}^2$ yerel bağlantılıdır. K tıkız bir altküme ise $\mathbb{R}^2 - K$ yerel bağlantılıdır.

9. Yerel bağlantılı bir uzayın her hangi bir bölüm uzayı da yerel bağlantılıdır.

10. Her ayrık uzay yerel bağlantılıdır.

11. Tamamen ayrılmış her uzay yerel bağlantılıdır.

12. Gerçel eksende $[0,1] \cup [2,3]$ kümesinin yerel bağlantılı olduğunu ama bağlantılı olmadığını gösteriniz.

16.11 YOL İLE BAĞLANTILI UZAYLAR

$(X, \mathscr{T})$ uzayı ile sürekli bir $f : [0,1] \to X$ fonksiyonu verilsin.

Tanım 16.11.1. 1. $[0,1]$ aralığının sürekli bir fonksiyon altında resmi olan her $Y \subset X$ alt uzayına bir *yol*, denilir.

2. X uzayının x, y öğe çiftini içeren bir yol varsa, bu yola x ile y öğelerini birbirine bağlayan bir yoldur, denilir.

3. Eğer X uzayının her öğe çifti bir yol ile birbirine bağlanabiliyorsa, X uzayına *yol ile bağlantılı* bir uzaydır, denilir.

X uzayı içinde Y yolu verildiğinde, tanım uyarınca sürekli bir $f : [0,1] \to X$ fonksiyonu vardır ve $Y = f([0,1])$ dir. Bu durumda $f(0) = a$ öğesine Y yolunun *başlangıç noktası* ve $f(1) = b$ öğesine Y yolunun *bitim noktası* denilir. Eğer başlangıç ve bitim noktaları çakışıyorsa Y yoluna kapalı bir yoldur, diyeceğiz.

$\mathbb{R}^n$ Öklit uzayının W altkümesi verilsin. W kümesine ait her a, b nokta çiftine karşılık öyle sonlu tane

$$a = p_0, p_1, \ldots, p_n = b$$

noktaları varolsun ki, ardışık noktaları birleştiren

$$p_0p_1, \qquad p_1p_2, \qquad \ldots, \qquad p_{n-1}p_n$$

doğru parçaları W tarafından kapsanıyor olsun. Bu durumda W kümesine *çokgenle bağlantılıdır*, diyeceğiz.

Çokgenle bağlantılı her W kümesinin yol ile bağlantılı olduğunu görmek kolaydır. Ama yol ile bağlantılı bir kümenin çokgenle bağlantılı olması gerekmez. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ içinde B birim çemberi yol ile bağlantılı (gerçekte B nin kendisi bir yoldur) bir alt uzayıdır. Ama bu alt uzay çokgenle bağlantılı değildir.

Önerme 16.11.1. *Yol ile bağlantılı her uzay bağlantılıdır.*

İSPAT: X yol ile bağlantılı bir uzay olsun. Her $x, y \in X$ öğe çiftini içeren bir $\ell(x, y)$ yolu vardır ve bu yol bağlantılı bir kümedir. O halde istenen şey *Önerme* 16.3.5 den çıkar.

Bu önermenin karşıtı doğru değildir, yani bağlantılı bir uzayın yol ile bağlantılı olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekle göstereceğiz.

Örnek 16.11.1. $\mathbb{R}^2$ düzleminde

$$G = \{(x, y) \,|\, y = \sin\frac{1}{x}\,,\; x > 0\}$$

kümesini düşünelim. $X = G \cup \{(0, 0)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde bağlantılı olduğu halde yol ile bağlantılı değildir.

İSPAT: $(0, \infty)$ aralığından $\mathbb{R}^2$ ye tanımlı olan

$$h : x \to (x, \sin\frac{1}{x})$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyonun sürekli olduğunu (gerçekte kendi grafiği üzerine bir eşyapı dönüşümüdür) biliyoruz. O halde, $(0, \infty)$ bağlantılı kümesinin sürekli h fonksiyonu altındaki resmi olan G kümesi de bağlantılı bir küme olacaktır. Öte yandan $(0, 0)$ noktasının her komşuluğu G ile kesişir, dolayısıyla $(0, 0) \in \tilde{G}$ dir. Buradan $G \subset X \subset \bar{G}$ çıkar. Artık, X kümesinin bağlantılı oluşu *Sonuç* 16.3.5 tan çıkar.

Öte yandan, eğer $p \in G$ ise p noktası ile $(0, 0)$ noktasını birleştiren ve G içinde kalan hiçbir yol olamaz; böyle bir yol olsaydı $x \to \sin(1/x)$ fonksiyonu $(0, 0)$ noktasında sürekli olurdu. Oysa böyle olmadığını biliyoruz.

16.12 PROBLEMLER

1. U kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde açık ve bağlantılı bir küme ise, U nun yol ile bağlantılı olduğunu gösteriniz.

2. X bağlantılı bir uzay ve C bağlantılı bir alt uzayı olsun. $A \subset X$ kümesi için $A \cap C \neq \emptyset$ ve $A' \cap C \neq \emptyset$ ise, $\partial A \cap C \neq \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

3. $f : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. Y uzayı bağlantılı olduğunda, her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ bağlantılı ise X uzayının da bağlantılı olduğunu gösteriniz.

4. $\mathbb{R}$ içinde sayılabilir hiç bir alt küme salt topolojiye göre bağlantılı değildir. Gösteriniz.

5. $Y \subset \mathbb{R}^2$ sayılabilir bir alt küme ise $\mathbb{R}2 \setminus Y$ bağlantılıdır. Gösteriniz.

6. $\mathbb{R}$ içinde $a < b < c$ olmak üzere $[a, b) \cup (b, c]$ kümesi yerel bağlantılı olduğu halde bağlantılı değildir. Neden?

7. Tamamen bağlantısız uzayın sürekli bir dönüşüm altındaki resmi tamamen bağlantısız olmayabilir. Bir örnekle gösteriniz.