

Bölüm 5

KOMŞULUKLAR

5.1 KOMŞULUKLAR

Tanım 5.1.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve A ile N kümeleri X uzayının iki alt-kümesi olsun. Eğer $A \subset T \subset N$ olacak şekilde her hangi bir $T \in \mathcal{T}$ varsa, N kümesine A nın bir *komşuluğu* (*yöresi*) denilir. Özel olarak yalnız bir öğeden ibaret $\{x\}$ kümesinin bir komşuluğuna, kısaca, x öğesinin bir komşuluğu (komşuluğu) diyeceğiz.

$\mathcal{T}$ topolojisinin başka birisiyle karışması kuşkusu varsa, "*komşuluk*" de-yimi yerine, kısaca, $\mathcal{T}$ -komşuluğu diyeceğiz.

Önerme 5.1.1. *Bir kümenin açık olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin, kendi öğelerine komşuluk etmesidir.*

İSPAT: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. G açık ise, her $x \in G$ için $\{x\} \subset G^\circ \subset G$ ve $G^\circ = G \in \mathcal{T}$ olduğundan, varsayımımızın gerekliliği komşuluk tanımından çıkar. Yeterliliğini görmek için, her $x \in G$ ye karşılık $\{x\} \subset T_x \subset G$ olacak şekilde bir $T_x \in \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. Bir yandan, her $x \in G$ için $x \in T_x$ olduğundan

$$G \subset \bigcup \{T_x : x \in G\}$$

dir. Öte yandan her $x \in G$ için $T_x \subset G$ olduğundan

$$G \supset \bigcup \{T_x : x \in G\}$$

dir, yani

$$G = \bigcup \{T_x : x \in G\} \quad (5.1)$$

olur. Her $x \in G$ için $T_x \in \mathcal{T}$ olduğuna göre [T3] aksiyomuna göre (5.1) den $G \in \mathcal{T}$ olduğu, yani G nin açık olduğu sonucu çıkar.

Tanım 5.1.2. Bir x noktasının bütün komşuluklarından oluşan aileyi $\mathcal{B}(x)$ ile gösterecek ve buna x noktasının *komşuluklar ailesi* diyeceğiz.

Önerme 5.1.2. $\mathcal{B}(x)$ ailesi, komşuluk aksiyomları diyeceğimiz aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. [N1]: $\mathcal{B}(x)$ ailesine ait her hangi bir kümeyi kapsayan her küme $\mathcal{B}(x)$ ailesine aittir.
2. [N2]: $\mathcal{B}(x)$ ailesine ait iki kümenin arakesiti yine $\mathcal{B}(x)$ ailesine aittir.
3. [N3]: $\mathcal{B}(x)$ ailesine ait her küme x noktasını içerir.
4. [N4]:) Eğer $V \in \mathcal{B}(x)$ ise, öyle bir $W \in \mathcal{B}(x)$ vardır ki her $y \in W$ için $V \in \mathcal{B}(y)$ olur.

İSPAT: İlk üç özellik Tanım 5.1.1 ile [T2] aksiyomundan hemen görülür. Son özeliği görmek için, W olarak x noktasını içeren ve V tarafından kapsanan her hangi açık bir kümeyi almak yetecektir.

[N4] aksiyomu şu anlama gelir: x noktasının bir komşuluğu x noktasına yeteri kadar yakın olan noktaların da komşuluğudur.

Bir x ögesini içeren her açık küme bu ögenin bir komşuluğudur, ama x ögesinin her komşuluğu açık bir küme olmak zorunda değildir.

5.1.1 PROBLEMLER

1. Tanım 2.3.1 şuna eşdeğerdir: A bir topolojik uzayın bir alt-kümesi olsun. Eğer A kümesi x noktasının bir komşuluğu ise, yani $A \in \mathcal{B}(x)$ ise, x noktası, A kümesinin bir iç noktasıdır.
2. Tanım (2.4.1) şuna eşdeğerdir: Her $N \in \mathcal{B}(x)$ için $(N \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise, x noktası A kümesinin bir *yığılma* noktasıdır.

3. **Önerme** 2.5.1 şuna eşdeğerdir: Bir x noktasının A kümesinin bir kaplama noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasının her komşuluğunun A ile kesişmesidir; yani her $N \in \mathcal{B}(x)$ için $N \cap A \neq \emptyset$ ise $x \in \bar{A}$ dır.
4. Ayırık olmayan bir uzayda bir noktanın komşuluklar ailesini bulunuz.
5. Bir noktanın sonlu tane komşuluğunun arakesiti yine bu noktanın komşuluğudur. Gösteriniz.
6. Bir X kümesi üzerindeki iki topolojinin aynı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in X$ ögesinin bu topolojilere göre komşuluklarının aynı olması dır.
7. Gerçel eksen üzerindeki salt topolojiye göre aşağıdaki kümelerden hangileri $\mathcal{B}(1)$ ailesine aittir?

$$(i) (0, 2], \quad (ii) (0, 1], \quad (iii) [1, 2), \quad (iv) (1, 2]$$

8. Sonlu tümleyenler topolojisinde bir noktanın bütün komşuluklarının açık kümeler olduğunu gösteriniz.
9. N kümesi A kümesinin bir komşuluğu ise, N nin her $B \subset A$ alt kümesinin de bir komşuluğu olacağını gösteriniz.
10. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

ailesi veriliyor.

- (a) $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzaydır. Gösteriniz.
- (b) e noktasının komşuluklarını bulunuz.
- (c) c noktasının komşuluklarını bulunuz.
- (d) $\{c, e\}$ kümesinin komşuluklarını bulunuz.
11. Bir p ögesinin bir A kümesinin bir kenar noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, p ögesinin her komşuluğunun hem A ile hem A' ile kesişmesidir. Gösteriniz.

5.2 KOMŞULUKLAR SİSTEMİ

KOMŞULUKLAR SİSTEMİ (AİLESİ) İLE TOPOLOJİK YAPILARIN KURULUŞU

Açık küme kavramını başlangıç noktası olarak [N1]-[N4] komşuluk aksiyomlarını elde ettiğimiz **Önerme 5.1.2** 'in bir karşısı vardır. Bir küme üzerinde bir topolojik yapı kurmanın değişik bir yöntemi olan bu özeliği şöyle ifade edebiliriz:

Önerme 5.2.1. *Her $x \in X$ için [N1]-[N4] komşuluk aksiyomlarını sağlayacak şekilde bir $\mathcal{B}(x)$ ailesi varsa, X üzerinde öyle bir tek $\mathcal{T}$ topolojik yapısı vardır ki $\mathcal{B}(x)$ ailesi x noktasının $\mathcal{T}$ -komşuluklarından ibarettir.*

İ S P A T:

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{B}(x)\} \quad (5.2)$$

ailesini tanımlayalım, $\mathcal{T}$ nun [T3] aksiyomunu sağladığı [N1] den ve [T2] aksiyomunu sağladığı [N2] den çıkar. [T1] aksiyomunun bu ikisinden çıkarılabildiğini biliyoruz (bkz. 2.1.1 Problem 9). O halde $\mathcal{T}$ ailesi X üzerinde bir topolojik yapı oluşturur.

Şimdi, her $x \in X$ için, verilen $\mathcal{B}(x)$ ailesinin x noktasının $\mathcal{T}$ -komşuluklar ailesinden başka bir şey olmadığını gösterelim: [N1] ve (5.2) den, x noktasının her $\mathcal{T}$ -komşuluğunun $\mathcal{B}(x)$ ailesine ait olduğu apaçıktır.

Tersine olarak her $V \in \mathcal{B}(x)$ kümesinin x noktasının bir $\mathcal{T}$ -komşuluğu olduğunu göstermek için

$$U = \{y \in X : V \in \mathcal{B}(y)\} \quad (5.3)$$

kümesini tanımlayalım. $V \in \mathcal{B}(x)$ olduğundan, (5.3) den $x \in U$ olur. Öte yandan $y \in U$ ise $V \in \mathcal{B}(y)$ ve [N3] gereğince $y \in V$ olacaktır; yani $U \subset V$ dir.

Şimdi $U \in \mathcal{T}$ olduğunu gösterelim. Bunun için **Önerme 5.1.1** 'ye göre, her $y \in U$ için $U \in \mathcal{B}(y)$ olduğunu göstermek yetecektir. Gerçekten $y \in U$ ise $y \in V \in \mathcal{B}(y)$ olduğundan, [N4] aksiyomuna göre öyle bir $W \in \mathcal{B}(y)$ vardır ki her $z \in W$ için $V \in \mathcal{B}(z)$ olur, ki bu (5.3) gereğince, $z \in U$ demektir. Buradan $W \subset U$ çıkar ve [N1] den $U \in \mathcal{B}(y)$ olur.

Geriye yalnız $\mathcal{T}$ nun tekliğini göstermek kalmıştır. Gerçekten istenenleri sağlayan her $\mathcal{T}$ -topolojisinin açık kümeleri, **Önerme 5.1.1** gereğince, (5.3) ile verilmiş olacaktır, ki bu $\mathcal{T}$ nun tek olması demektir.

Örnek 5.2.1. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerindeki salt topolojiyi komşuluklar dizgesiyle de kurabiliriz (bkz. Örnek 4.1.6). Her $x \in \mathbb{R}$ noktasına karşılık, x noktasını içeren her hangi bir açık aralığı kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aileye $\mathcal{B}(x)$ diyelim. Bu ailenin [N1]-[N4] komşuluk aksiyomlarını sağladığını görmek kolaydır. Öyleyse, her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{B}(x)$ ailesini x noktasının komşuluklar ailesi olarak kabul eden bir $\mathcal{T}$ topolojisi vardır. Şimdi bu topolojinin $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{R}$ salt topolojisinden başka bir şey olmadığını gösterelim.

$A \in \mathcal{R} = \mathfrak{R}^*$ olsun. $\mathfrak{R}^*$ topolojisinin tanımı gereğince, A kümesi açık aralıkların bir bileşimidir. o halde her $x \in A$ ögesi A tarafından kapsanan bir (a, b) aralığına aittir; ki bu, yukarıdaki tanım gereğince, $A \in \mathcal{B}(x)$ olmasını gerektirir. Bu ise, (5.3) e göre, $A \in \mathcal{T}$ olması demektir. Şu halde $\mathfrak{R}^* \subset \mathcal{T}$ dur.

Tersine olarak, $T \in \mathcal{T}$ ise, (5.3) e göre, her $x \in T$ için $T \in \mathcal{B}(x)$ dir. O halde x noktasını içeren ve T kümesi tarafından kapsanan açık bir (a, b) aralığı vardır. Dolayısıyla T kümesi bu aralıkların bir bileşimi olarak yazılabilir; yani $T \in \mathfrak{R}^*$ dir. Şu halde $\mathcal{T} \subset \mathfrak{R}^*$ dur. Elde edilen bu iki kapsamadan $\mathcal{T} = \mathfrak{R}^*$ çıkar.

5.2.1 PROBLEMLER

1. $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki salt topoloji (bkz. Örnek 4.1.2) yi kurmak için aşağıdaki komşuluklar dizgelerinden her hangi birisinin kullanılabileceğini gösteriniz.
 - (a) Düzlemdeki her z noktasına karşılık, kenarları eksenlere paralel olan ve bu noktayı içeren her hangi bir açık dikdörtgeni kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile,
 - (b) Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu nokta merkez olarak çizilen her hangi açık bir disk kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile,
 - (c) Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu noktayı içeren ve kapalı bir eğriyle sınırlanmış her hangi bir bölgenin içini kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile.

5.3 KOMŞULUKLAR TABANI

Tanım 5.3.1. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayındaki bir x noktası için $\mathfrak{S}(x) \subset \mathcal{B}(x)$ alt ailesi verilsin. Eğer her $V \in \mathcal{B}(x)$ için $W \subset V$ olacak şekilde bir $W \in \mathfrak{S}(x)$ varsa, $\mathfrak{S}(x)$ ailesine x noktasının ($\mathcal{T}$ ya göre) bir komşuluklar tabanıdır (ya da x noktasında yerel bir tabandır) denilir.

Bir $A \subset X$ alt kümesinin komşuluklar tabanı da benzer şekilde tanımlanır.

$\mathfrak{S}(A)$ ailesi A kümesinin bir komşuluklar tabanı ise $\mathfrak{S}(A)$ ya ait kümelerin her sonlu arakesiti yine $\mathfrak{S}(A)$ ya ait olacaktır.

Örnek 5.3.1. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mathfrak{S}(x) = \{(x - \delta, x + \delta) : \delta > 0\} \quad (5.4)$$

ailesi, gerçel eksen üzerindeki salt topolojiye göre x noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Neden?

Önerme 5.3.1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ise, bir $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ alt ailesinin $\mathcal{T}$ topolojisine bir taban olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in X$ için $\mathfrak{L}(x) = \{W \in \mathcal{B} : x \in W\}$ ailesinin x noktası için bir komşuluklar tabanı olmasıdır.

İSPAT: $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{T}$ için bir taban olsun. Bir $x \in X$ için $V \in \mathcal{B}(x)$ ise, $x \in T \subset V$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T}$ vardır. Varsayımımız gereğince, T açık kümesi $\mathcal{B}$ ye ait kümelerin bir bileşimidir. O halde $x \in W \subset T$ olacak şekilde enaz bir $W \in \mathcal{B}$ vardır, ki bu $W \in \mathfrak{L}(x)$ olmasını gerektirir; yani $\mathfrak{L}(x)$ ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanı olur. Böylece koşulun gerekliliği çıkar.

Yeterliği görmek için bir $T \in \mathcal{T}$ alalım. Her $x \in T$ için $x \in V_x \subset T$ olacak şekilde bir $V_x \in \mathfrak{L}(x)$ vardır ($T \in \mathcal{B}(x)$ olduğundan). Oysa bu durumda,

$$T = \bigcup \{V_x : x \in T\}$$

olacaktır. O halde $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{T}$ topolojisinin bir tabanıdır.

Tanım 5.3.2. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktası için sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, $(X, \mathcal{T})$ uzayına *Birinci Sayılabilir Aksiyomunu* sağlıyor denilir.

Örnek 5.3.2. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mathfrak{N}(x) = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (5.5)$$

ailesi, gerçel eksen üzerindeki salt topolojiye göre x noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı olduğundan, bu topolojik uzay Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar. Gösteriniz.

Önerme 5.3.2. $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ bir x noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı ise bu noktanın iç içe bir $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ komşuluklar tabanı vardır.

İSPAT: İç-içe deyiminden anlayacağımız şey, her n doğal sayısı için $V_{n+1} \subset V_n$ olmasıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_2 &= U_1 \cap U_2 \\ V_3 &= U_1 \cap U_2 \cap U_3 \\ &\vdots \\ V_n &= U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \dots \cap U_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

dizisi isteneni sağlayacaktır.

Önerme 5.3.3. İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan her uzay, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu da sağlar.

İSPAT: $\mathcal{B}$ sayılabilir bir taban olsun. Önerme 5.3.1 gereğince $\mathfrak{S}(x) = \{W \in \mathcal{B} : x \in W\}$ ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanıdır ve $\mathfrak{S}(x) \subset \mathcal{B}$ olduğuna göre, sayılabilir bir ailedir.

5.4 KARMA PROBLEMLER05

1. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve σ ailesi $\mathcal{T}$ -topolojisinin bir alt tabanı olsun.

- (a) $\sigma(x) = \{S \in \sigma : x \in S\}$ ailesinin x noktası için bir komşuluklar tabanı olmayacağını bir örnekle gösteriniz.

- (b) $\sigma(x)$ ailesinin sonlu arakesitlerinin oluşturduğu ailenin x noktası için bir komşuluklar tabanı olacağını gösteriniz.
2. Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu nokta merkez olarak çizilen, bütün açık dairelerden oluşan ailenin, salt topolojiye göre, z noktasının bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz.
 3. Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu nokta merkez olarak çizilen $\{\frac{1}{r} \mid r = 1, 2, 3, \dots\}$ yarıçaplı açık disklerden oluşan ailenin, salt topolojiye göre, bu noktanın sayılabilir bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz. Buradan, düzlemin salt topolojisinin *birinci sayılabilirlik aksiyomunu* sağladığı sonucunu çıkarınız.
 4. Ayırık olmayan bir uzayda her hangi bir noktanın komşuluklar ailesi nedir? Ayırık bir uzayda her hangi bir noktanın komşuluklar ailesi nedir?
 5. p ögesinin A kümesinin bir *yığılma noktası* olması için gerekli ve yeterli koşul, p nin komşuluklar tabanına ait her kümenin A ya ait ve p den farklı olan bir ögeyi içermesidir.
 6. Ayırık bir uzayda her noktanın sonlu bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz.
 7. Bir noktanın sonlu bir komşuluklar tabanı varsa, bu noktanın tek bir kümeden oluşan bir komşuluklar tabanı vardır. Gösteriniz.
 8. $(X; \mathcal{T})$ topolojik uzayında $\mathcal{F}$ ailesi, kapalı kümeler için bir taban ise, bu aileye ait kümelerin tümleyenlerinden oluşan aile açık kümeler için bir tabandır. Gösteriniz.
 9. $(X, \leq)$ tam sıralanmış bir küme olsun. Her $a, b \in X$ öge çiftine karşılık $\{x \in X : x > a\}$, $\{x \in X : x < b\}$ ve $\{x \in X : a < x < b\}$ kümeleri tanımlanıyor. a, b ögeleri bütün X kümesini taradığında elde edilecek bütün bu kümelerden oluşan ailenin X kümesi üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz. Bu tabanın ürettiği topolojiye *sıra topolojisi* denir. Bu topolojik uzayın kapalı kümelerinin nasıl olduğunu belirleyiniz.
 10. $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ailesinin $(X, \mathcal{A})$ ayırık uzayı için bir taban olduğunu gösteriniz.

11. Ayrık olmayan $(X, \mathcal{T})$ uzayı için $\mathcal{B} = \{X\}$ ailesinin bir taban olduğunu gösteriniz.
12. $\mathcal{B} = \{x : |x| < r, \quad x, r \in \mathbb{Q}\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topoloji için bir taban olduğunu gösteriniz.