Bölüm 6

SÜREKLİ FONKSİYONLAR

6.1 YEREL SÜREKLİLİK

Tanım 6.1.1. $(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(x_0)$ öğesinin her V komşuluğuna karşılık $f(U) \subset V$ olacak şekilde x_0 öğesinin bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonu x_0 *noktasında süreklidir* denilir.

Bundan böyle, $\mathscr{B}(z)$ ile z noktasının komşuluklar ailesini; $\mathfrak{S}(z)$ ile z noktasının bir komşuluklar tabanını; $\mathscr{B}$ ile bir topoloji tabanını; $\mathfrak{s}$ ile bir alt-tabanını göstereceğiz.

Teorem 6.1.1. *$(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(a) f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir;

(b) Her Her $V \in \mathscr{B}(f(x_0))$ komşuluğuna karşılık

$$x \in U \Rightarrow f(x) \in V$$

olacak şekilde bir $U \in \mathscr{B}(x_0)$ komşuluğu vardır;

(c) Her $V \in \mathscr{B}(f(x_0))$ komşuluğuna karşılık $U \subset f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \mathscr{B}(x_0)$ komşuluğu vardır;

(d) Her $V \in \mathscr{B}(f(x_0))$ için $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}(x_0)$ dır;

(e) Her $S \in \mathfrak{S}(f(x_0))$ için $f^{-1}(S) \in \mathscr{B}(x_0)$ dır.

İ S P A T:

(a) ⇒ (b): Bu gerektirme `Tanım` 6.1.1 den çıkar.

(b) ⇒ (c): olduğu $f^{-1}(V)$ nin tanımından çıkar.

(c) ⇒ (d): olduğu `Önerme` 5.1.2 nin [N1] özeliğinden

(d) ⇒ (e): olduğu $\mathfrak{S}(f(x_0) \subset \mathscr{B}(f(x_0))$ dan çıkar.

(e) ⇒ (a): Gerçekten her $V \in \mathscr{B}(f(x_0))$ komşuluğuna karşılık, komşuluklar tabanı tanımı (bkz. `Tanım` 5.3.1) gereğince $f(x_0) \in W \subset V$ olacak şekilde bir $W \in \mathfrak{S}(f(x_0))$ vardır. (e) nin varlığını kabul edersek $f^{-1}(W) \in \mathscr{B}(x_0)$ olacaktır. $U = f^{-1}(W)$ alırsak (a) nın varlığı, hemen $f(U) = ff^{-1}(W) = W \subset V$ bağıntısından çıkar.

Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 6.1.1. *$(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu x noktasında sürekli ve $x \in \bar{A}$, $A \subset X$, ise $f(x) \in \overline{f(A)}$ dır.*

İ S P A T: $V \in \mathscr{B}(f(x))$ ise $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}(x)$ dir; yani $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ dir. Buradan, $f(f^{-1}(V) \cap A) \subset f(f^{-1}(V)) \cap f(A)$ olduğu düşünülürse, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ çıkar. O halde, `Problem` 3 gereğince, $f(x) \in \overline{f(A)}$ olur.

Önerme 6.1.2. *$(X, \mathscr{T})$, $(Y, \mathscr{S})$ ve $(Z, \mathscr{L})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu $x \in X$ noktasında ve g fonksiyonu da $f(x) \in Y$ noktasında sürekli iseler $h = gof : X \to Z$ bileşke fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir.*

İ S P A T: $A \in \mathscr{B}(h(x))$ ise, g fonksiyonu $f(x)$ noktasında sürekli olduğuna göre $g^{-1}(A) \in \mathscr{B}(f(x))$ dir. Yine, f nin x noktasında sürekli olduğu düşünülürse $f^{-1}(g^{-1}(A)) = h^{-1}(A) \in \mathscr{B}(x)$ olacaktır: ki bu istediğimiz şeyi verir.

6.2 YAYGIN SÜREKLİLİK

Tanım 6.2.1. $(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $A \subseteq X$ alt-kümesine ait her noktada f fonksiyonu sürekli ise, f fonksiyonu A üzerinde *(yaygın) süreklidir (global süreklidir)*, denilir. Eğer X kümesine ait her noktada sürekli ise, f fonksiyonu *sürekli bir fonksiyondur*, diyeceğiz.

Eğer f fonksiyonunun tanım ya da değer kümesi üzerinde birden çok topolojik yapıyı aynı zamanda düşünüyorsak, f fonksiyonunun hangi topolojilere göre sürekli olduğunu belirtmek için $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ *süreklidir* ya da f *fonksiyonu* $\mathscr{T} - \mathscr{S}$ *süreklidir*, diyeceğiz.

Ayrıca ispatlarda kısalığı sağlamak için bir $(H, \mathscr{H})$ topolojik uzayının bütün kapalı kümeleri ailesini $\mathscr{H}'$ ile göstereceğiz.

Teorem 6.2.1. *$(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.*

(a) f fonksiyonu X üzerinde süreklidir;

(b) Her $A \subseteq X$ alt-kümesi için $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ dır;

(c) Her $K \in \mathscr{S}'$ için $f^{-1}(K) \in \mathscr{T}'$ dür;

(d) Her $S \in \mathscr{S}$ için $f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ dur.

İSPAT:

$(a) \to (b)$**:** Bu gerektirme `Önerme` 6.1.1 den çıkar.

(b) → (c): $K \in \mathscr{S}'$ için $F = f^{-1}(K)$ dersek,

$$f(\bar{F}) \subset \overline{f(F)} \subseteq \bar{K} = K$$

olacaktır ve buradan

$$\bar{F} \subset f^{-1}f(\bar{F}) \subset f^{-1}(K) = F \subset \bar{F}$$

çıkar, ki bu $F = \bar{F}$ olması, yani F kümesinin kapalı olması demektir.

(c) → (d): $S \in \mathscr{S}$ ise $S' \in \mathscr{S}'$ dür. (c) den $f^{-1}(S') \in \mathscr{T}'$ dür.

$$f^{-1}(S') = [f^{-1}(S)]'$$

den $f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ çıkar.

(d) → (a): Bir $x \in X$ noktası ile bir $V \in \mathscr{B}(f(x))$ komşuluğu verilsin.

$$f(x) \in S \subseteq V$$

olacak şekilde bir $S \in \mathscr{S}$ vardır; öyleyse

$$x \in f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(V)$$

olacaktır. Varsayımımıza göre $f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ olduğundan,

$$f^{-1}(V) \in \mathscr{B}(x)$$

çıkar.

Önerme 6.2.1. *$(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanı ise, f fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ olmasıdır.*

İ S P A T: Koşulun gerekliği Teorem 6.2.1 (d) şıkkında verildi. Yeterliğini görmek için bir $S \in \mathscr{S}$ alalım.

$$S = \bigcup_{i \in I} \{B_i \,:\, B_i \in \mathscr{B}\}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$f^{-1}(S) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

olacaktır. Varsayımımız gereğince, açık kümelerin bir bileşimi olduğu için $f^{-1}(S)$ açıktır; öyleyse `Teorem` 6.2.1(d) den f fonksiyonunun sürekliliği çıkar.

Önerme 6.2.2. *X, Y, Z topolojik uzayları verilsin $f : X \to Y$ ile $g : Y \to Z$ sürekli fonksiyonlar ise $h = gof : X \to Z$ sürekli bir fonksiyondur.*

Bunun ispatı hemen bileşke fonksiyon tanımından çıkar.

6.2.1 Problemler

1. Bir topolojik uzaydan kendisine olan özdeşlik dönüşümü süreklidir. Neden?

2. Her hangi bir topolojik uzaydan başka bir topolojik uzaya olan sabit fonksiyonlar süreklidir. Neden?

3. Bir ayrık uzaydan her hangi bir topolojik uzaya olan fonksiyonlar süreklidir. Neden?

4. Her hangi bir topolojik uzaydan ayrık olmayan bir uzaya olan fonksiyonlar süreklidir. Neden?

5. $(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\mathfrak{s}$ ailesi $\mathscr{S}$ nin bir alt tabanı ise, f nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $S \in \mathfrak{s}$ için $f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ olmasıdır. Gösteriniz.

6. Bir X topolojik uzayından bir Y topolojik uzayı içine bir f fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki ifadelerin eşdeğer olduklarını gösteriniz:

   (a) f fonksiyonu X üzerinde süreklidir,

   (b) Her $A \subseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}(A^\circ) \subset (f^{-1}(A))^\circ$ dır,

   (c) Her $A \subseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}(\bar{A}) \supset \overline{(f^{-1}(A))}$ dır.

6.3 AÇIK ve KAPALI DÖNÜŞÜMLER

Tanım 6.3.1. $(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu açık kümeleri açık kümelere resmediyorsa f fonksiyonuna *açık bir dönüşüm;* kapalı kümeleri kapalı kümelere resmediyorsa f fonksiyonuna *kapalı bir dönüşümdür* denilir.

f fonksiyonu sürekli olsa bile açık kümeleri açık kümelere ya da kapalı kümeleri kapalı kümelere resmetmeyebilir. Ancak f sürekli olduğu zaman, açık kümelerin f altındaki ters resimlerinin açık; ve kapalı kümelerin f altındaki ters resimlerinin kapalı olduğunu biliyoruz (bkz. `Teorem` 6.2.1). Başka bir deyişle $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli, bire-bir ve örten (BBÖ) ise $f^{-1} : Y \to X$ ters fonksiyonu hem açık, hem de kapalı bir dönüşümdür. Buradan hemen şu önerme çıkar:

Önerme 6.3.1. *Bire-bir ve örten $f : X \to Y$ bir fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi (homeomorphism) olması için gerekli ve yeterli koşul f nin sürekli ve açık (ya da sürekli ve kapalı) olmasıdır.*

Bu önermeye denk olarak hemen şu önermeyi de söyleyebiliriz.

Önerme 6.3.2. *$f : X \to Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi olması için gerek ve yeterli koşul f ve f^{-1} fonksiyonlarının sürekli olmasıdır.*

Önerme 6.3.3. *$f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu verilsin ve $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanı olsun. Aşağıdaki özellikler birbirlerine denktirler:*

(a) f açık bir dönüşümdür.

(b) Her $B \in \mathscr{B}$ için $f(B) \in \mathscr{S}$ dir.

(c) Her $x \in X$ ve her $V \in \mathscr{B}(x)$ için $f(V) \in \mathscr{B}(f(x))$ dir.

İ S P A T:

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Açık dönüşüm ve taban tanımı ile $[T3]$ belitinden çıkar.

(a) $\Rightarrow$ (c): $V \in \mathscr{B}(x)$ ise $x \in T \subset V$ olacak şekilde bir $T \in \mathscr{T}$ vardır. f açık bir dönüşüm olduğundan $f(T) \in \mathscr{S}$ dir. Oysa $f(x) \in f(T) \subset f(V)$ olduğundan $f(V) \in \mathscr{B}(f(x))$ olacaktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): $T \in \mathscr{T}$ olsun. Her $y \in f(T)$ için $y = f(x)$ olacak gibi bir $x \in T$ vardır. $T \in \mathscr{B}(x)$ olduğundan, (c) gereğince, $f(T) \in \mathscr{B}(y) = \mathscr{B}(f(x))$ olacaktır. O halde, `Önerme` 5.1.1 gereğince $f(T) \in \mathscr{S}$ dir.

Önerme 6.3.4. *$f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli ve kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul X in her A alt-kümesi için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ olmasıdır.*

İ S P A T: f sürekli ve kapalı olsun. `Teorem` 6.2.1 (b) gereğince $f(A) \subset f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ olacaktır. f kapalı olduğundan $f(\bar{A})$ kapalıdır. $f(A)$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme, bu kümenin kaplamı olacağından, yukarıdaki kapsama $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ olmasını gerektirir.

Tersine olarak her A için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ ise f kapalı olur. Ayrıca, `Teorem` 6.2.1 (b) gereğince f sürekli olur.

Bir fonksiyonun açık ya da kapalı olmak zorunda olmadığını söylemiştik. Benzer olarak, açık bir fonksiyonun aynı zamanda kapalı olması ya da kapalı bir fonksiyonun aynı zamanda açık olması da gerekmez. Buna bir örnek verelim.

Örnek 6.3.1. $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\pi(x, y) = x$ diye tanımlansın. Buna düzlemin birinci boyut üzerine izdüşümü denilir. $\mathscr{D}$ ailesi düzlemdeki bütün açık daireleri göstersin. $\mathscr{D}$ ailesinin düzlemdeki salt (mutlak) topoloji için bir taban olduğunu biliyoruz (bkz. `Örnek` 4.1.2).

Basit bir şekil çizilince hemen görülebileceği gibi

$$D = \{(x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$$

açık diskinin $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$ boyutu (yatay eksen) üzerindeki izdüşümü $|x - a| < r$ açık aralığıdır. Her $D \in \mathscr{D}$ için $\pi(D)$ resmi $\mathbb{R}_1$ de açık bir küme olduğuna göre, `Önerme` 6.3.4 gereğince, π izdüşüm fonksiyonu açık bir dönüşümdür. Öte yandan

$$K = \{(x, y) : xy \geq 1, x > 0\}$$

kümesinin $\mathbb{R}^2$ içinde kapalı bir küme olduğu apaçıktır. Oysa $\pi(K) = (0, \infty)$ olduğundan, K kapalı kümesinin π altındaki resmi $\mathbb{R}_1$ de açık bir kümedir. Yani π izdüşüm fonksiyonu kapalı bir dönüşüm değildir.

Örnek 6.3.2. α sıfırdan farklı bir gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$f : x \to \alpha x \tag{6.1}$$

fonksiyonuna α-boylaması diyeceğiz. Bu dönüşüm bir topolojik eşyapı resmidir.

İ S P A T: f nin BBÖ (bire-bir-örten) olduğu apaçıktır. f^{-1} ters dönüşümü

$$f^{-1} : x \to \frac{1}{\alpha} x \quad (\alpha \neq 0) \tag{6.2}$$

dir ve bu da bir boylama dönüşümüdür. f dönüşümü altında, salt topolojinin tabanına ait her (a, b) aralığının resmi $(\alpha a, \alpha b)$ açık aralığıdır; yani f açık bir dönüşümdür. Öte yandan, her (c, d) açık aralığının f^{-1} altındaki resmi $(c/\alpha, d/\alpha)$ açık aralığıdır, yani f süreklidir. O halde, `Önerme` 6.3.1 uyarınca, f bir topolojik eşyapı resmimdir.

Örnek 6.3.3. β her hangi bir gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$g : x \to x + \beta \tag{6.3}$$

fonksiyonuna β-kayması (ötelemesi) diyeceğiz. Bu dönüşüm bir topolojik eşyapı resmidir.

İ s p a t : g nin BBÖ olduğu apaçıktır. g^{-1} ters dönüşümü $g^{-1} : x \to x - \beta$ dır ve bu da bir kaymadır. g dönüşümü altında her (a, b) açık aralığının resmi $(a + \beta, b + \beta)$ açık aralığıdır; yani g açık bir dönüşümdür. Öte yandan, her (c, d) açık aralığının f^{-1} altındaki resmi $(c - \beta, d - \beta)$ açık aralığıdır; yani g süreklidir. O halde g bir topolojik eşyapı resmidir.

Örnek 6.3.4. Yukarıdaki (6.1) ile (6.3) dönüşümlerinin bileşkesine; yani

$$h = gof : x \to \alpha x + \beta \tag{6.4}$$

dönüşümüne *doğrusal (linear) bir dönüşüm*, denilir. Bunun $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir topolojik eşyapı resmi olacağı apaçıktır. Bu dönüşümün tersi

$$h^{-1} = f^{-1}og^{-1} : x \to \frac{1}{\alpha}(x - \beta) \quad (\alpha \neq 0) \tag{6.5}$$

dır. Bu da bir doğrusal dönüşümdür.

Örnek 6.3.5. $\mathbb{R}$ den $(-1, +1)$ açık aralığı üzerine tanımlanan

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \tag{6.6}$$

fonksiyonu bir topolojik eşyapı dönüşümüdür.

Gerçekten (6.6) fonksiyonun bire-bir-örten ve tersinin de

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, $x_1 < x_2$ ise $f(x_1) < f(x_2)$ olur; yani, f artan bir fonksiyondur. f nin sürekli olduğunu göstermek için, $-1 < c < d < +1$ koşulunu sağlayan her $(c, d) \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ *ailesi* $\mathbb{R}$ *içindeki bütün açık aralıkların ailesidir*) açık aralığı için

$$f^{-1}((c, d)) = \left(\frac{c}{1 - |c|}, \frac{d}{1 - |d|} \right)$$

olduğuna dikkat etmek yetecektir (bkz. `Problem` 6.2.1 (5.)). Öte yandan her $(a, b) \in \mathcal{R}$ açık aralığı için

$$f((a, b)) = \left(\frac{a}{1 + |a|}, \frac{b}{1 + |b|} \right)$$

olduğundan f açık bir dönüşümdür. Dolayısıyla f bir topolojik eşyapı resmidir (bkz. `Önerme` 6.3.2).

Buradan çıkan sonuç şudur:

Sonuç 6.3.1. *Salt topolojiye göre gerçel eksen ile* $(-1, +1)$ *alt aralığı topolojik olarak eşyapılıdır.*

6.3.1 P R O B L E M L E R

1. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlanan sabit bir fonksiyonun sürekli ve kapalı bir dönüşüm olduğunu; ama açık bir dönüşüm olmadığını gösteriniz.

2. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlanan $x \longrightarrow x^2$ fonksiyonun açık olmadığını gösteriniz.

3. `Önerme` 6.3.1 ve `Önerme` 6.3.2 yi ispatlayınız.

4. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ bire-bir örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi olması için gerekli ve yeterli koşul, her $A \subset X$ alt-kümesi için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ olmasıdır. Gösteriniz.

5. $(X, \mathscr{T})$ uzayının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, X uzayından her Y uzayına tanımlı fonksiyonların sürekli olmasıdır.

6. Boş olmayan bir X kümesi veriliyor. X üzerinde öyle bir $\mathscr{T}$ topolojisi kurunuz ki, her $(Y, \mathscr{S})$ uzayından $(X, \mathscr{T})$ uzayına tanımlı her fonsiyon sürekli olsun. Bu topolojiyi belirleyiniz.

7. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise, X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmeder; yani

$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{6.7}$$

olur. Gösteriniz.