0.1 PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olduğuna göre aşağıdaki özeliklerin varlığını gösteriniz:

   (a) $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in \overline{(A \cap B)} &\Rightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow T \cap (A \cap B) \neq \emptyset) \\ &\Rightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap B \neq \emptyset)] \\ &\Rightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}) \\ &\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned}$$

   (b) $(\bar{A})' = (A')^o$ ve $(A^o)' = (A')^-$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in (\bar{A})' &\Longleftrightarrow x \notin \bar{A} \\ &\Longleftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \wedge (T \cap A \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \wedge (T \subset A') \\ &\Longleftrightarrow x \in (A')^o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in (A^o)' &\Longleftrightarrow (x \notin A^o) \\ &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow (T \cap A' \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A')^- \end{aligned}$$

   (c) $\bar{A} = A^o \cup \partial A$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow (T \cap A \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \subset A^o) \vee [(T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap A' \neq \emptyset)]] \\ &\Longleftrightarrow (x \in A^o) \vee (x \in \partial A) \end{aligned}$$

   (d) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

   Çözüm:

$$Bar A \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cap \partial B = \emptyset$$

   dir. Ayrıca Problem 2.3.1-3(c) uyarınca $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ olduğunu biliyoruz. O halde $\partial(A \cup B) \supset \partial A \cup \partial B$ olduğunu göstermek yetecektir.

$$\begin{aligned} x \in \partial A \cup \partial B &\Longleftrightarrow [(\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow (T \cap (A \cup B) \neq \emptyset)] \\ &\Longleftrightarrow x \in \partial(A \cup B) \end{aligned}$$

   çıkar

   (e) $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap (A')^-$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in \partial A &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap A' \neq \emptyset)] \\ &\Longleftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in (A')^-) \\ &\Longleftrightarrow (x \in \bar{A} \cap (A')^-) \end{aligned}$$

   (f) $\partial A = \bar{A} - A^o = \bar{A} \cap (A')^-$

Çözüm:

$$(x \in \partial A) \Leftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \vee (T \cap A' \neq \emptyset)$$

olduğunu biliyoruz. $x \notin A^o$ olduğunu göstermek için Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. Eğer $(x \in \partial A) \wedge (x \in A^o)$ olsaydı

$$(\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \wedge T \subset A)$$

olurdu. Bu durumda $x \notin \partial A$ olması gerekirdi. Demek ki $x \in A^o$ olamaz. O halde $x \in \bar{A} - A^o$ dır.

(g) $A \subset B \Rightarrow (\bar{A})^o \subset (\bar{B})^o$

Çözüm:

$$A \subset B \Rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B}) \Rightarrow (\bar{A})^o \subset (\bar{B})^o$$

olur.

(h) $A \subset B \Rightarrow (A^o)^- \subset (B^o)^-$

Çözüm:

$$A \subset B \Rightarrow (A^o \subset B^o) \Rightarrow (A^o)^- \subset (B^o)^-$$

olur.

(i) A açık ise $A \subset (\bar{A})^o$ dir.

Çözüm: $A \in \mathscr{T} \Rightarrow A = A^o$ olduğundan

$$A \in \mathscr{T} \Rightarrow A \subset \bar{A} \Rightarrow A^o \subset (\bar{A})^o \Rightarrow A \subset (\bar{A})^o$$

çıkar.

(j) A kapalı ise $(A^o)^- \subset A$ dır.

Çözüm: $A \in \mathscr{T}' \Rightarrow A = \bar{A}$ olduğundan

$$A \in \mathscr{T}' \Rightarrow A^o \subset A \Rightarrow (A^o)^- \subset \bar{A} \Rightarrow (A^o)^- \subset A$$

çıkar.