15.433 YATIRIM

Ders 7: CAPM ve APT

Bölüm 2: Uygulamalar ve Sınamalar

Bahar 2003

Öngörüler ve Uygulamalar

- Öngörüler:

  - CAPM: Piyasa dengesinde yatırımcılar sadece piyasa riski taşıdıklarında ödüllendirilir.

  - APT: Arbitraj olmadığı durumda, yatırımcılar sadece faktör riski taşıdıklarında ödüllendirilir.

- Uygulamalar:

  - profesyonel portföy yöneticileri: menkul kıymet getirilerini fon performansını değerlendirmek.

  - denetleyici kurumlar: denetlenen firmalarda sermaye maliyeti.

  - mahkeme kararları: gelecek dönemdeki gelir kaybı iddialarını değerlendirmek.

  - kurumsal yönetici: sermaye bütçeleme kararları.

CAPM ve APT'nin Sınanabilirliği

CAPM ve APT'nin genel kabul görmesi bunların öngörülerinin ampirik olarak sınanmasını daha önemli hale getiriyor.

6. bölümden hatırlayacağınız gibi, her iki teori de bazen gerçekçi olmayan varsayımlara dayanıyor.

Soyut mantık ürünü gerçek hayatta ne kadar geçerli olur?

Maalesef, CAPM ve APT'nin öngörülerini ampirik olarak sınamak zor:

- Ne CAPM'deki piyasa portföyü ne de APT'deki risk faktörü gözlemlenebilir.
- Beklenen getiriler gözlemlenemez ve zaman içinde değişebilir.
- Oynaklık doğrudan gözlemlenemez ve zaman içinde değişebilir.

CAPM'in İdeal Bir Sınaması

İdeal bir durumda, aşağıdaki girdilere sahibiz:

1. Risksiz borç alma-borç verme oranı r_f

2. Piyasada beklenen getiri $E(r_m)$ ve riskli varlığın beklenen getirisi $E(r_f)$

3. Piyasa riskine maruz kalma

$$\beta_i = \frac{cov\left(r_M, r_i\right)}{var\left(r_M\right)} \tag{1}$$

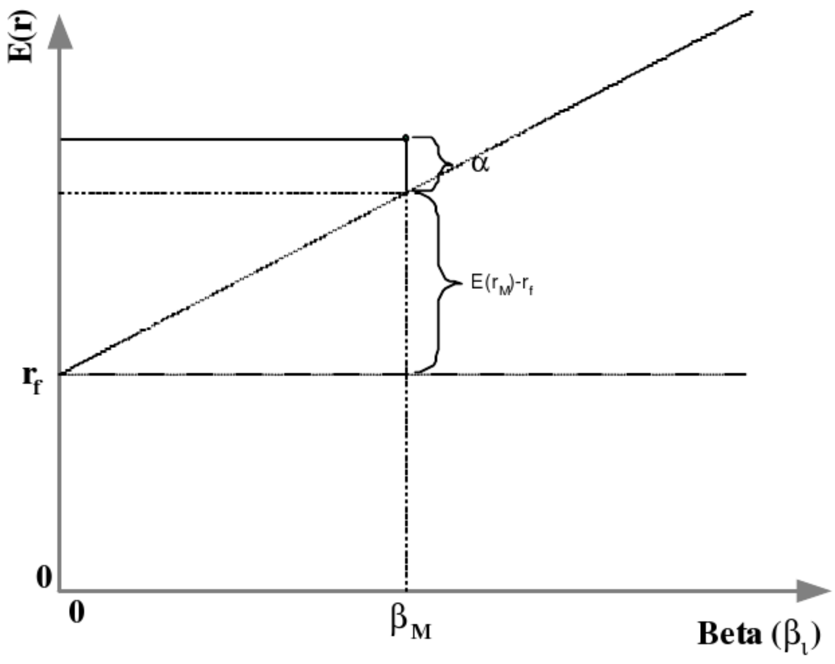
Bu girdiler ödül $(E(r_f) - r_f)$ ve risk β_i arasındaki ilişkiyi incelememize yardımcı olur.

1. Daha çok risk, daha çok ödül?

2. Bunlar sıralanır mı?

3. 1 birimlik riske maruz kalmanın ödülü nedir?

4. Sıfır risk, sıfır ödül?



E(r)
α
E(r_M)-r_f
r_f
0
0
β_M
Beta (β_i)

Bazı Pratik Uzlaşmalar

Piyasa portföyü r_M gözlemlenemez: onun yerine temsili bir şey kullanın, örneğin S&P 500 endeksi.

Beklenen getiriler $E(r_m)$ ve $E(r_f)$ gözlemlenemez: bunların yerine örneklem ortalamasını kullanın.

$$\mu_M = \frac{1}{N}\sum_t^T r_{M,t} \qquad \mu_i = \frac{1}{N}\sum_t^T r_{i,t} \tag{2}$$

gözlemlenemeyen risk

$$\beta_i = \frac{cov\left(r_M, r_i\right)}{var\left(r_i\right)} \tag{3}$$

örneklem tahminlerini kullan:

$$\beta_i = \frac{\widehat{cov}\left(r_M, r_i\right)}{\widehat{var}\left(r_i\right)} \tag{4}$$

burada

$$\widehat{var}\left(r_i\right) = \frac{1}{N}\sum_t^T \left(r_{t,M} - \mu_M\right) \tag{5}$$

$$\widehat{cov}\left(r_M, r_i\right) = \frac{1}{N}\sum_t^T \left(r_{t,M} - \mu_M\right)\left(r_{t,i} - \mu_i\right) \tag{6}$$

Doğrusal İlişkiyi Sınamak

Piyasa portföyünü, r_M, temsil eden bir şey seçin, ve N aylık getiriyi kaydedin:

$$r_{t,M} : i = 1, \ldots, N \tag{7}$$

aynı dönem için, herbirinin N aylık getirisi olan I sayıda firmadan örneklem elde edin:

$$r_{t,1} : i = 1, \ldots, I \quad and \quad t = 1, \ldots, N \tag{8}$$

i'ninci firma için örneklem ortalamasını, μ_i, ve β_i tahminini oluşturun:

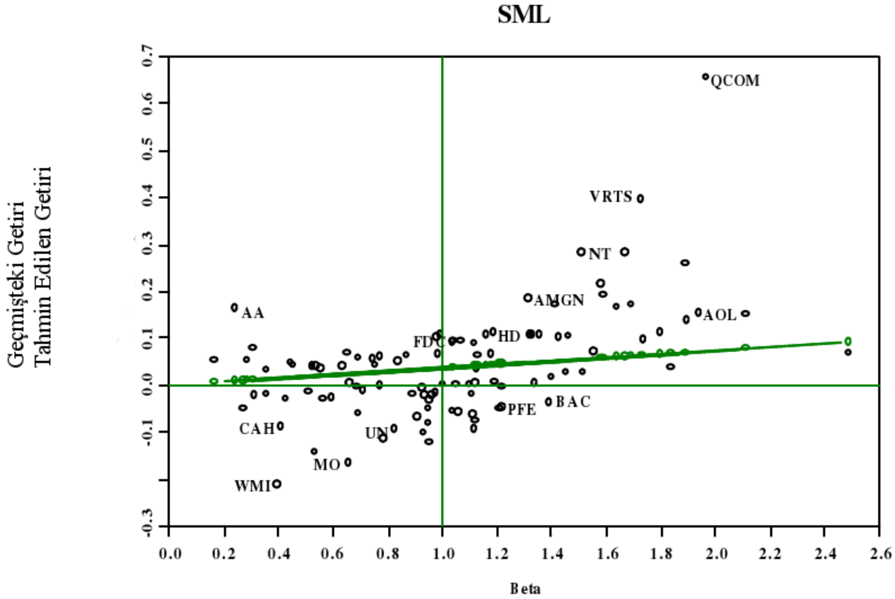
$i = 1, 2, 3, ...I$ için doğrusal ilişkiyi sınayın:

$$\mu_i - r_f = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_i \tag{9}$$

CAPM'in Gerektirdikleri

γ_0: sıfır risk $\rightarrow$ sıfır ödül

$\gamma_1 = \mu - r_f$: bir birimlik risk, ödül piyasayla aynı.



Regresyon: Temel Plan

İki değişken, x ve y, N kadar çıktı var:

$$(x_i, y_j), i = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

x ve y'nin ilişkili olduğuna inanmak için nedenlerimiz var. Özellikle, y'yi açıklamak için x'i kullanmak istiyoruz:

$$y_i = a + bx_j + \varepsilon. \tag{11}$$

y: bağımlı değişken.

x: bağımsız, açıklayıcı değişken.

ε_i: ortalaması sıfır olan rassal hata terimi.

katsayılar: kesme terimi, a, eğim, b.

Regresyon: Motivasyon

Bazı motive edici örnekler:

1. i gününde, x_i Orlando'daki hava sıcaklığı, y_i dondurulmuş portakal suyu vadeli işlem sözleşmelerinin fiyatıdır.

2. i firması için, x_i kaldıraç oranı, y_i temerrüt oranıdır.

3. i gününde, x_i, FED'in hedef faiz oranı, y_i üç aylık hazine bonosu faizidir.

4. i.nıncı saniyede, x_i, rgallati@mit.edu tarafından gönderilen paket sayısı, y_i, jcox@mit.edu tarafından alınan paket sayısıdır.

Her durumda, x'in sonucu y'yi etkiler:

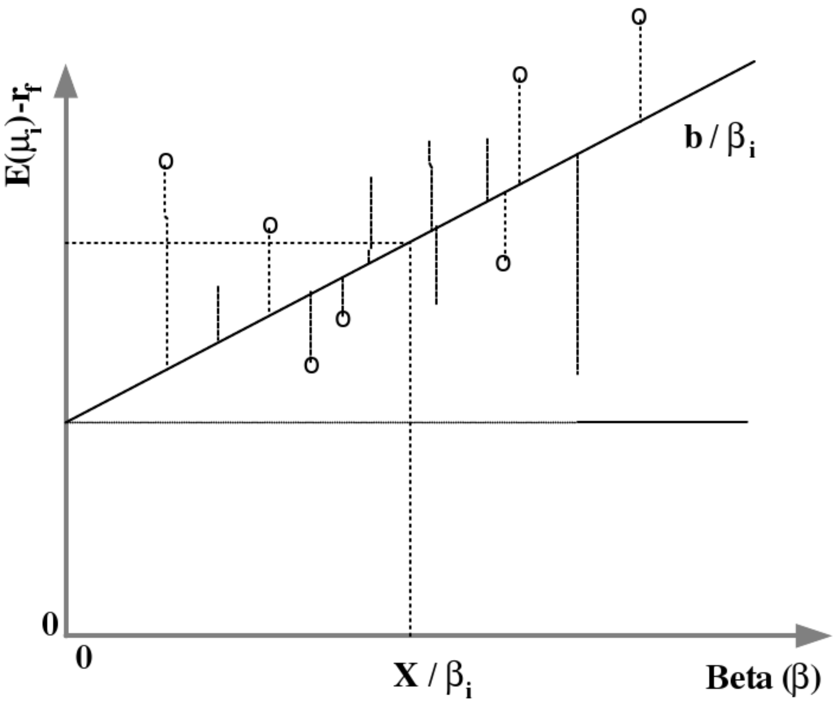
$$y_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i \tag{12}$$

fakat ε_i ile gösterilen, x_i ile ilgisi olmayan başka rassal faktörler de olabilir.Eğim katsayısı b özellikle önemlidir çünkü y'nin x'e olan hassasiyetini ölçer.

Regresyon Katsayıları

Amaç: y ve x arasındaki doğrusal ilişkiyi en iyi açıklayacak olan a ve b katsayılarını bulun. Nasıl: farkların karelerini en aza indirecek a ve b kombinasyonlarını bulun:

$$\min_{a \in R, b \in R} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a - b \cdot x_i\right)^2 \tag{13}$$



Regresyon: Çözüm

Optimizasyon problemini çözerek aşağıdakileri elde ederiz:

- Eğim katsayısı b'nin tahmini, $\hat{\text{b}}$:
$$\widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \widehat{\mu}_y)(x_i - \widehat{\mu}_x)}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \widehat{\mu}_x)} \tag{14}$$
- Kesme terimi a'nın tahmini, â: â=μ_y-$\hat{\text{b}}\mu_x$

Örneklem ortalaması için kullanılan notasyonun aşina olduğuna dikkat edin:

$$\widehat{\mu}_x = \frac{1}{N}\sum_{t}^{T} x_i \quad \widehat{\mu}_y = \frac{1}{N}\sum_{t}^{T} y_i \tag{15}$$

Neden çözümlerimizi tahmin olarak isimlendiriyoruz? Neden b ve a üzerine şapka işaretleri koyuyoruz?

Her zaman gerçek b değerine yakın bir $\hat{\text{b}}$, ve gerçek a değerine yakın bir â mı elde ederiz?

Büyük gözlemlerde (büyük N), böyle olduğuna oldukça eminiz. Neden?

Standart Hata

a ve b'nin gerçek değerlerini tahmin etmek için veriyi kullanırız.

N sayıda gözlem verildiğinde (y_i, x_i), regresyon çözümlerimiz $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ en iyi tahmini verir. Fakat hiçbir zaman %100 emin olamayız.

$\hat{a}$ ve $\hat{b}$ hakkındaki belirsizliği nasıl ölçeriz?

$\hat{a}$ ve $\hat{b}$'i rassal değişkenler olarak düşünürüz. Herhangi bir tahmin için, diyelim $\hat{b}$, onun standart sapmasının bir tahminini elde edebiliriz, buna standart hata denir. Bir tahminin standart hatası onun kesinliğinin bir ölçüsüdür.

Regresyon Sonucunu Yorumlamak

Bu ders için, daha önceden hazırlanmış bir regresyon paketi kullanacağız. (örneğin, excel):

Girdi: (y_i, x_i), i=1,....,N Çıktı:

- â ve $\hat{\text{b}}$ tahminleri
- bunların standart hataları
- bunların t istatistikleri
- R kare

Standart hatalar ve t istatistikleri tahminleriniz için kesinlik ölçüsü sağlar.

R kare size bağımlı değişkendeki rassallığın ne kadarının açıklayıcı değişken x tarafından açıklandığını gösterir.

Eğim Katsayısı Hakkında Daha Fazla Bilgi

Eğim katsayısı b'nin tahminini hatırlayın:

$$\widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \widehat{\mu}_y)(x_i - \widehat{\mu}_x)}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \widehat{\mu}_x)} \tag{16}$$

Aşina olduğumuz bazı notasyonlar:

$$\widehat{var}(r_i) = \frac{1}{N} \sum_{t}^{T} (r_{t,M} - \mu_M) \tag{17}$$

$$\widehat{cov}(r_M, r_i) = \frac{1}{N} \sum_{t}^{T} (r_{t,M} - \mu_M)(r_{t,i} - \mu_i) \tag{18}$$

$$\beta_i = \frac{\widehat{cov}(r_M, r_i)}{\widehat{var}(r_i)} \tag{19}$$

Sezgisel olarak, $\hat{\text{b}}$, x ve y arasındaki kovaryansın cov(x,y), x'in varyansı, var(x), ile ölçeklendirilmiş bir ölçüsüdür.

CAPM'in Sınanması

CAPM'in öngördüğü:

$$\widehat{\mu}_i - r_f = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_i \tag{20}$$

43 endüstriyel portföye dayanan veriler, bu ilişkinin tam olarak doğru olmadığını gösteriyor.

Bir ihtimal: Beklenen getiri ölçülerimiz β ile ilgili olmayan bazı noise'lardan etkilenmiş olabilir.

Hâla öğrenmek istediklerimiz:

- Ortalama olarak, ödül risk ile ilgili midir? $\gamma_1 = 0$ mıdır değil midir?
- Ortalama olarak, sıfır risk sıfır ödül mü demektir? $\gamma_0 = 0$ mıdır değil midir?
- Ortalama olarak, bir birimlik riske maruz kalma piyasa getirisine eşit midir?

$$\gamma_1 = \mu_M - r_f = 5.9\% \text{ ?} \tag{21}$$

Regresyon İşlemi

Bir regresyon oluştur:

- Bağımlı değişken:
- Bağımsız değişken: $x_i = \beta_i$
- β ile ilgili olmayan noise ekleyin, ε_i.

Veriyi regresyon paketine yükleyin:

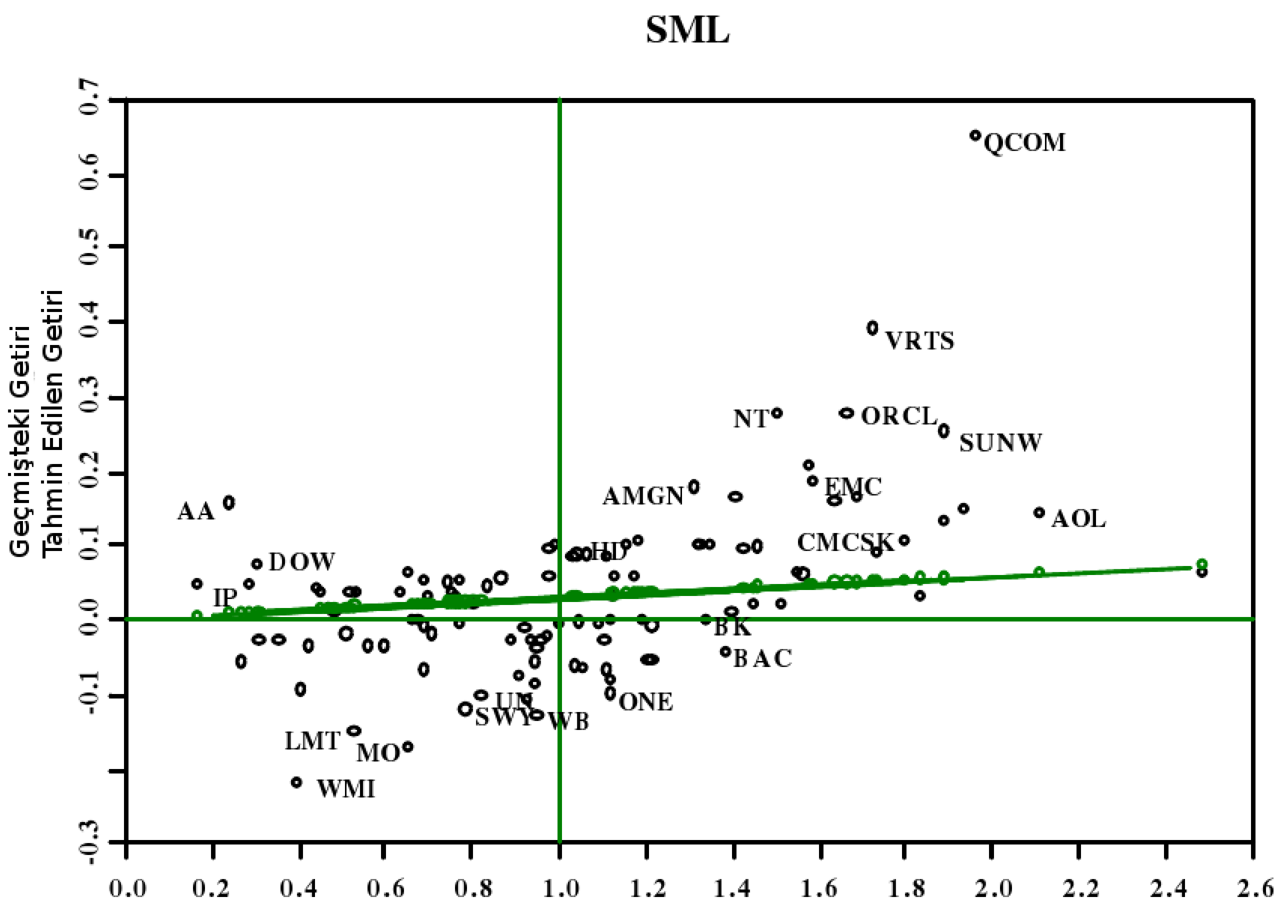
	tahmin	standart hata	t-istatistiği
γ_0	6%	1.8%	3.5
γ_1	0.17%	1.7%	0,1

R kare $= 2\%$

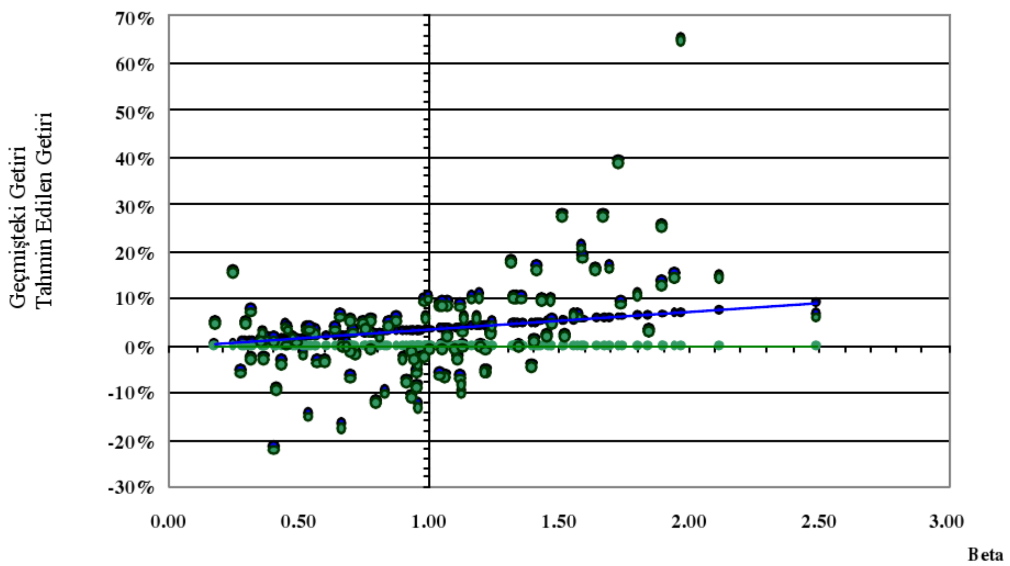
CAPM'in öngördüklerini hatırlayın:

1. Kesme terimi $\gamma_0 = 0$

2. Eğim, $\gamma_1 = \hat{\mu_M} - r_f = r_f$



SML
Geçmişteki Getiri
Tahmin Edilen Getiri
QCOM
VRTS
NT
ORCL
SUNW
EMC
AMGN
AA
AOL
CMCSK
HD
DOW
IP
BK
BAC
ONE
UN
SWY
WB
LMT
MO
WMI
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.3
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6



70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
-10%
-20%
-30%
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
Beta
Geçmişteki Getiri
Tahmin Edilen Getiri

t İstatistiğiyle İlgili Pratik Bir Yöntem

Bir tahminin, örneğin $\hat{b}$, sıfırdan anlamlı olarak farklı olup olmadığını anlamanın en iyi yolu t istatistiğini, $\hat{t_b}$ kullanmaktır.

Pratik yöntem: $\hat{t_b}$'i standart normal olarak düşünün (büyük örneklemler için kötü bir varsayım değil). b'nin mutlak değeri ne kadar büyükse, sıfırdan anlamlı olarak farklı olması ihtimali o kadar fazladır.

Hipotez testi: Boş Hipotez: $\hat{b}$=0, alternatif: $\hat{b}\neq 0$

1. t-istatistiği 1.960 ise boş hipotez %5 anlamlılık düzeyinde reddedilir.

2. t-istatistiği 2.576 ise boş hipotez %1 anlamlılık düzeyinde reddedilir.

Örneğin, $\hat{t_\gamma}$=0.1 ise, $\hat{t_\gamma}$ hakkında ne söyleyebiliriz? Peki $\hat{t_\gamma}$ hakkında ne söyleyebiliriz?

CAPM Sınamalarının Bir Özeti

Genelde, sınama sonuçları örneklem verisine, örneklem dönemine, istatistiksel yaklaşımlara, piyasa portföyü için seçilen temsili portföye vb. dayalıdır. Fakat aşağıdaki bulgular sağlamdır:

- Risk ve ödül arasındaki ilişki CAPM tarafından belirlendiğinden daha düzdür.
- Risk ölçüsü β beklenen getirilerdeki çapraz-kesit değişiklikleri açıklayamaz.($\hat{}\gamma$ istatistiksel olarak anlamsız, R kare sıfıra yakındır).
- CAPM'in öngörüsünün tersine, kesme terimi $\hat{\gamma}$ sıfırdan anlamlı olarak farklıdır.

Bazı Muhtemel Açıklamalar

1. Menkul kıymetler borsası endeksi piyasa portföyü için iyi bir temsilci midir?

    - kamuya ait olmayan maddi varlıkların sadece 1/3'ü şirketlere aittir.
    - kurumsal varlıkların sadece 1/3'ü menkul kıymetler tarafından finanse edilir.
    - insan sermayesi gibi maddi olmayan varlıklar?
    - uluslararası piyasalar?

2. β'da ölçüm hatası:

    - Piyasa portföyü dışında, hiçbir zaman gerçek β değerini gözlemlemeyiz.
    - CAPM'i sınamak için, β'nın tahminlerini kullanırız, bu tahminler hatalı ölçülebilir.
    - β'daki ölçüm hatası, eğim katsayısının aşağıya doğru ve kesme terimi katsayısının yukarıya doğru yanlı tahmin edilmesine sebep olacaktır.

3. Beklenen getirilerdeki ölçüm hataları

    - Gerçekte gözlemlenemeyen beklenen getiriler için, örneklem ortalamalarını temsilen kullanırız.
    - Ortalamaların tahmin edilmesinin zor olduğu biliniyor, ve bu tahminlerde noise var.
    - Eğer ortalamalardaki tahminler ilintiliyse, istatistiksel bir sorun vardır (değişkenlerde hatalar)

4. Borçlanma kısıtları

- Bu ders CAPM'in tek bir versiyonunu içerir ve borçlanmanın kısıtlı olmadığını varsayar.
- Gerçekte, borçlanma kısıtları gerçekçidir. Bu kısıtlar teminat kurallarını, borç veren kişinin borç alan kişinin gelecekteki gelirine erişmesini kısıtlayan iflas kanunlarını vb. içerir.
- Fisher Black, borçlanma kısıtlarının, düşük β hisse senetlerinin CAPM'in öngördüğünden daha yüksek beklenen getiri oranına sahip olmasına yol açabileceğini gösterdi.

CAPM'in Ötesine Gitmek

β, riskin iyi bir ölçüsü müdür? Negatif çarpıklık ile ilgili riskin ölçüsü nedir?

Başka risk faktörleri de olabilir mi?

Zamana bağlı olarak değişen oynaklık, zamana bağlı olarak değişen beklenen getiriler.

Zamana bağlı olarak değişen riskten kaçınma, zamana bağlı olarak değişen β?

Odak Noktası:

BKM Bölüm 13

- s. 383 (13.1)
- s. 386-392 (beta, CAPM, SML, borsa endeksi, kavram bilgisi soruları 3 ve 4)
- s. 391-393 (13.2)
- s. 308-313 ortası (Eşitlik 10.15, eşitlik 10.16)
- s. 399 alt kısmı (13.4-13.6 arası)

Okuyun: Kritzman (1993) ve Kritzman (1994).

Potansiyel Soru Çeşitleri: Kavram bilgisi soruları 1, 2, 3, 4.

Bir Sonraki Ders İçin Hazırlık

Lütfen Okuyun:

- Fama ve French (1992) ve
- Jagadeesh ve Titman (1993).