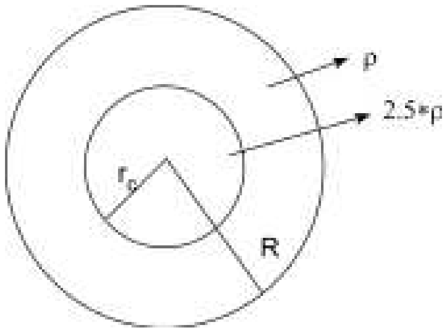
Soru Takımı #2'in Çözümleri

Eylemsizlik Momenti

1.



R yarıçaplı, m kütleli ve ρ yoğunluklu bir kütlenin eylemsizlik momenti

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 R^5 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$$Hacim = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Bizim örneğimizde gezegenin toplam eylemsizlik momenti, iki kürenin eylemsizlik momentlerinin toplamıdır.

$$I_{Toplam} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 + \frac{8}{15}\pi(2.5-1)\rho r_c^5 = \frac{8}{15}\pi\rho(R^5 + \frac{3}{2}r_c^5$$

$$R\ yarıçaplı\ \rho\ yoğunluklu\ kürenin\ eylemsizlik\ momenti = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$$r_c\ yarıçaplı(2.5-1)\rho yoğunluklu\ kürenin\ eylemsizlik\ momenti = \frac{8}{15}\pi(2.5-1)\rho r_c^5$$

Tanım olarak $L_{Toplam} = \frac{I}{mR^2}$ ya da bizim örneğimizde $L = \frac{I_{Toplam}}{M_{Toplam}R^2}$

$$M_{Toplam} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 + \frac{4}{3}\pi(2.5-1)\rho r_C^3 = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R^3 + \frac{3}{2}r_c^3\right)$$

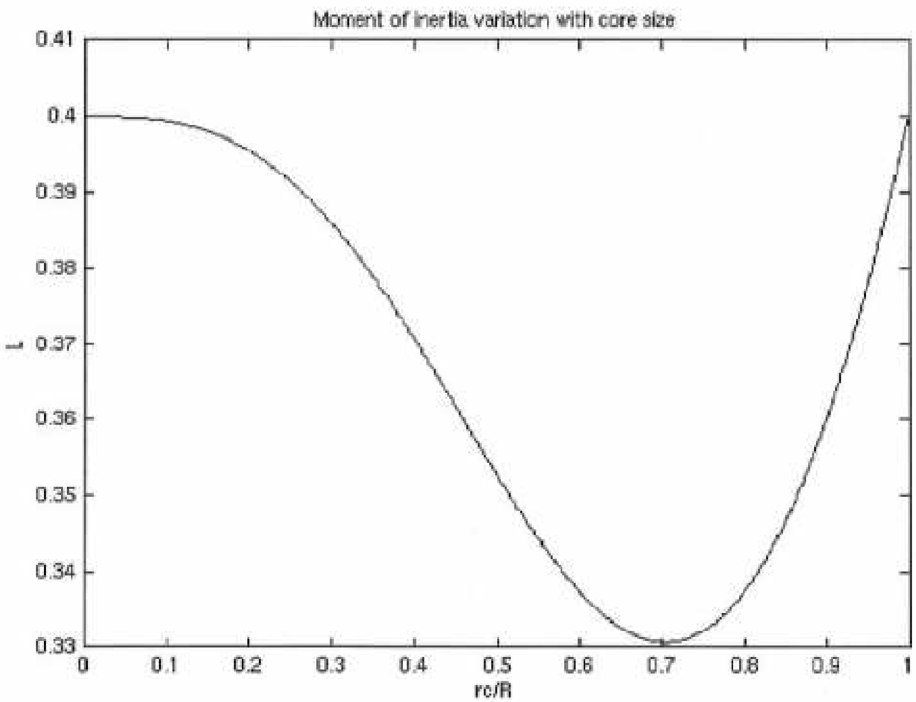
$$L = \frac{\frac{8}{15}\pi\rho(R^5 + \frac{3}{2}r_c^5}{\frac{4}{3}\pi\rho(R^3 + \frac{3}{2}r_c^3)R^2} = \frac{2}{5}\left(\frac{R^5 + \frac{3}{2}r_c^5}{R^5 + \frac{3}{2}r_c^3 R^2}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1 + \frac{3}{2}r_c\frac{r_c^5}{R}}{1 + \frac{3}{2}\frac{r_c^3}{R^3}}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1 + 1.5X^5}{1 + 1.5X^3}\right)$$

Burada, $X = \frac{r_c}{R}$ dir.

MATLAB de L(x) i grafiğe aktar ve X=0.7040'da L=0.3307'yi elde et.

```
% problem 1

rc_R=0:0.001:1;                                    % we'll plot for the radii ratio
                                                       form 0 to 1
L=(8/15 + 4/5.*rc_R.^5)./(4/3 + 2.*rc_R.^3);      % derived formula for L as a
                                                       function of rc/R

[miminum_value,index] = min(L)                     % finding the minimum value of
                                                       vector L
rc_R(index)                                        % the value of rc/R for which L is
                                                       minimum

plot(rc_R,L)                                       % plot the function
title('Moment of inertia variation with core size');
xlabel('rc/R');
ylabel('L');
```

```
miminum_value =

    0.3307

index =

   705

ans =

    0.7040
```



2. MATLAB de elde etmiş olduğunuz grafiği kullanarak, değerleri okuyunuz:

Mars	r_c/R	$r_c=r_c/R*3396$ km
	0.968	1249.1 km
	0.945	3209.2 km
Merkür	r_c/R	$r_c=r_c/R*2440$ km
	0.104	1717.8
Ay	r_c/R	$r_c=r_c/R*1738$ km
	0.220	382.4 km

0.987 1715.4 km

b) Bu olguları kullanınız: $M = \rho_{ort} * \frac{4}{3}\pi R^3$ Burada M, gezegenin toplam kütlesi, ρ_{ort}, ortalama yoğunluk, R: toplam yarıçap. Bunlardan ρ_{ort} ve R bilinmektedir.

$$I = LMR^2$$

Herbir gezegen için toplam kütle (M) ve eylemsizlik momenti (I) bulmak için, ders notlarından şu bağıntıları kullanınız:

$$I = \frac{8}{15}\pi(\rho_m R^5 + \rho_c r_c^5 - g_m r_c^5)$$

$$M = \frac{4}{3}\pi(\rho_m R^3 + \rho_c r_c^3 - \rho_m r_c^3)$$

ρ_m: Mantonun yoğunluğu

ρ_c: Çekirdek yoğunluğu

r_c: Çekirdek yarıçapı

I, M, R ve rc değerlerinin verilmiş olduğunu ve bilinmeyenlerin ρ_m ve ρ_c olduğuna dikkate edelim. Denklem sistemleri bu nedenle çözülebilir.

Kütle denkleminden ρ_c yı çıkartabiliriz

$$\frac{3M}{4\pi} = \rho_m(R^3 - r_c^3) + \rho_c r_c^3$$

$$\rho_c = \frac{\frac{3M}{4\pi} - \rho_m((R^3 - r_c^3)}{r_c^3}$$

ρ_m için bir denklem elde etmek için, I. Denklemi manipüle ediyoruz:

$$I = \frac{8}{15}\pi(\rho_c r_c^5 + \rho_m(R^5 - r_c^5))$$

Türetilmiş rc yi yukarıdaki denklemde yerine yerleştirelim:

$$\frac{15I}{8\pi} = \frac{\frac{3M}{4\pi} - \rho_m(R^3 - r_c^3)}{r_c^3} r_c^5 + g_m(R^5 - r_c^5)$$

$$\frac{15I}{8\pi} = \frac{3M}{4\pi} r_c^2 - \rho_m(R^3 - r_c^3) r_c^2 + \rho_m(R^5 - r_c^5)$$

$$\frac{15I}{8\pi} - \frac{3M r_c^2}{4\pi} = \rho_m(-R^3 r_c^2 + r_c^5 + R^5 - r_c^5)$$

$$\frac{15I - 6M r_c^2}{8\pi} = \rho_m(R^5 - R^3 r_c^2)$$

$$\rho_m = \frac{15I - 6M r_c^2}{8\pi(R^5 - R^3 r_c^2)}$$

Her bir gezegen için ilkin rm denkeleminde, peşinden rc denkleminde uygun değerleri yerine yerleştirmek suretiyle rm=3400 kg/m3 ve rc=8000 kg/m3 e en yakın değerleri seçiniz. Takip eden üç sayfada herbir gezegen için sonuçlara bakınız. Doğru cevaplar boz renkte gölgelendirilmiştir.

```
% Mars

rc_R = [0.368 0.945];          % ratio of core radius to total radius as read from the
                                 graph to problem 1
R = 3396;                      % total radius as given in the problem [km]
ro_avg = 3933;                 % average density as given in the problem [kg/m^3]
L = 0.376;                     % L given as given in the problem

rc = rc_R * R                  % core radius [km]

M = ro_avg*4/3*pi*R^3*10^9;    % total mass [kg]

I = L*M*R^2;                   % moment of inertia

% mantle density
rom = (15*I - 6*M.*rc.^2)./(8*pi*(R^5 - R^3.*rc.^2));    % [kg/km^3]
ro_m = 10^-9.*rom                                        % [kg/m^3]

% core density
ro_c = 10^-9.*(3*M/(4*pi) - rom.*(R^3 - rc.^3))./rc.^3   % [kg/m^3]
```

```
rc =

   1.0e+03 *

   1.2497    3.2092
```

$r_c =$ 1249.7 km

```
ro_m =

   1.0e+03 *

   3.5601    1.7271
```

$\rho_m =$ 3660.1 kg/m^3

```
ro_c =

   1.0e+03 *

   9.1369    4.3410
```

$\rho_c =$ 9136.9 kg/m^3

```
% Mercury

rc_R = 0.704;               % ratio of core radius to total radius as read from the
                              graph to problem 1
R = 2440;                   % total radius as given in the problem [km]
ro_avg = 5427;              % average density as given in the problem [kg/m^3]
L = 0.33;                   % L given as given in the problem

rc = rc_R * R               % core radius [km]

M = ro_avg*4/3*pi*R^3*10^9; % total mass [kg]

I = L*M*R^2;                % moment of inertia

% mantle density
rom = (15*I - 6*M.*rc.^2)./(8*pi*(R^5 - R^3.*rc.^2));     % [kg/km^3]
ro_m = 10^-9.*rom                                          % [kg/m^3]

% core density
ro_c = 10^-9.*(3*M/(4*pi) - rom.*(R^3 - rc.^3))./rc.^3   % [kg/m^3]
```

```
rc =

   1.7178e+03
```

$r_c =$
1717.8 km

```
ro_m =

   3.5441e+03
```

$\rho_m =$
3544.1 kg/m3

```
ro_c =

   8.9406e+03
```

$\rho_c =$
8940.6 kg/m3

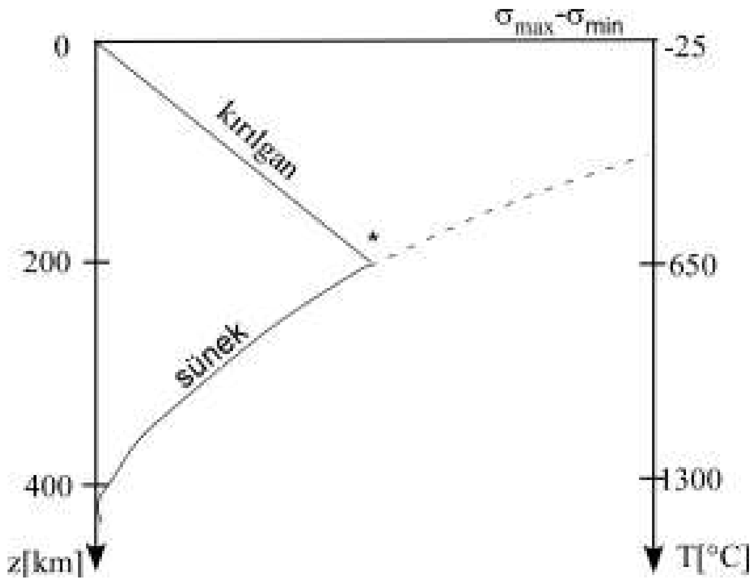
```
% Moon

rc_R = [0.220 0.987];        % ratio of core radius to total radius as read from the
                              graph to problem 1
R = 1738;                    % total radius as given in the problem [km]
ro_avg = 3350;               % average density as given in the problem [kg/m^3]
L = 0.394;                   % L given as given in the problem

rc = rc_R * R                % core radius [km]

M = ro_avg*4/3*pi*R^3*10^9; % total mass [kg]

I = L*M*R^2;                 % moment of inertia

% mantle density
rom = (15*I - 6*M.*rc.^2)./(8*pi*(R^5 - R^3.*rc.^2));    % [kg/km^3]
ro_m = 10^-9.*rom                                         % [kg/m^3]

% core density
ro_c = 10^-9.*(3*M/(4*pi) - rom.*(R^3 - rc.^3))./rc.^3  % [kg/m^3]


rc =

   1.0e+03 *

    0.3824    1.7154

ro_m =

   1.0e+03 *

    3.2972    1.4047

ro_c =

   1.0e+03 *

    8.2564    3.4279
```

$r_c =$ 382.4 km

$\rho_m =$ 3297.2 kg/m^3

$\rho_c =$ 8256.4 kg/m^3

3. a)



- Kırılgan davranıştan sünek davranışa 200 km ve 650 °C gerçekleşmektedir.
- Deformasyon litosferin altında ihmal edilebilir olmaktadır (1300°C ya da 392 km'de (çizgisel jeotermal gradyan kabullenerek saptanmıştır).

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{675K}{200\ km} = 3.375\ K/km$$

$$z = \frac{1325°C}{3.375K/km} = 392.6\ km$$

b) $\mathrm{K} = 5\frac{W}{mK}$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 3.375\ K/km$$

Ders notlarından ısı akısı için denklemi kullanırsak,

$$Q_{Ay} = \mathrm{K}\frac{\partial T}{\partial t} = 5\frac{W}{mK} * 3.375 * \frac{10^{-3}K}{m} = 0.0169\ W/m^2$$

Derste kullanmış olduğumuz Yeryuvarı'nın $\frac{\partial T}{\partial t}$ için yaklaşımı kullanarak,

$$Q_{Yeryuvarı} = \frac{5W}{mK} * 10\frac{K}{km} = 0.05\ W/m^2$$

Q_{Ay}, $Q_{Yeryuvarı}$'ndan yaklaşık olarak üç kat daha küçüktür. Bu ay üzerinde çok daha kalın bir litosfere işaret eder.

4. Bir gün içinde bir kişi tarafından üretilen ısı miktarı

$Q = 1 * 10^6\ cal = 2 * 10^6 * 4.18\ J = 8.36 * 10^6\ J$
Saniye cinsinden zaman:
$1\ Gün = 24 * 60 * 60\ s = 86400\ s$
Isının akmış olduğu yüzey:
S=2 m^2
Isı akısı: $Q_{İnsan} = \frac{Q}{tS} = \frac{8.36*10^6 J}{8.64*10^4 s*2m^2} = 48.4 \frac{W}{m^2}$

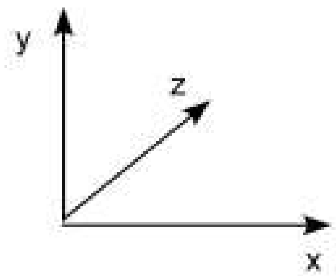
Bir önceki problemden $Q_{Yeryuvarı} = 0.05\ W/m^2$olduğunu biliyoruz.

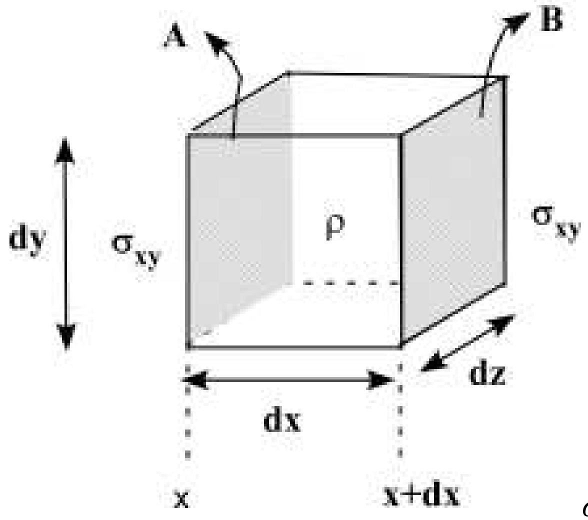
$Q_{İnsan}$ a denk Yeryuvarı'nın yüzeyindeki alan

$$A = \frac{Q_{İnsan}}{Q_{Yeryuvarı}} * S = \frac{48.4}{0.05} 2m^2 = 1936\ m^2 = 44\ m * 44\ m$$

Tipik ayaktopu (futbol) sahasının alanı 1600 m^2'dir. Ancak sanırım 2000 m^2'lik alanda oynayabilirsin.

5.





S-dalgası y-yönünde titreşmekte ve x-yönünde ilerlemektedir. $Gerilim = \frac{Kuvvet}{Alan}$ olduğunu hatırlayalım. F=ma ifadesiyle başlayalım:

$$F = \sigma_{xy}(x + dx)dydz - \sigma_{xy}(x)dydz^*$$

$$B\ kenarına\ etki\ eden\ kuvvet = \sigma_{xy}(x + dx)dydz$$

$$A\ kenarına\ etki\ eden\ kuvvet = \sigma_{xy}(x)dydz^*$$

$$m = \rho dxdydz$$

$a = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ s-dalgası y yönünde titreşmiş olduğundan.

F=ma ya denkleştirirse,

$$\sigma_{xy}(x + dx)dydz - \sigma_{xy}(x)dydz = \rho dxdydz \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

** Bir türevin tanımını hatırlayalım:

$$\frac{\sigma_{xy}(x + dx) - \sigma_{xy}(x)}{dx} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{dx} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Notlardan, $\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon xy$ ve $\varepsilon xy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$= \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$ S-dalgası x yönünde titreşmez. U=0

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Pozitif X yönünde ilerleyen bir dalga paketinin ötelemesini şu şekilde ifade edebiliriz:

$v(x - vst)$

Daha sonra

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v' \frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} v' = v'' \frac{\partial x}{\partial x} = v''$ eklem kuralını kullanarak,

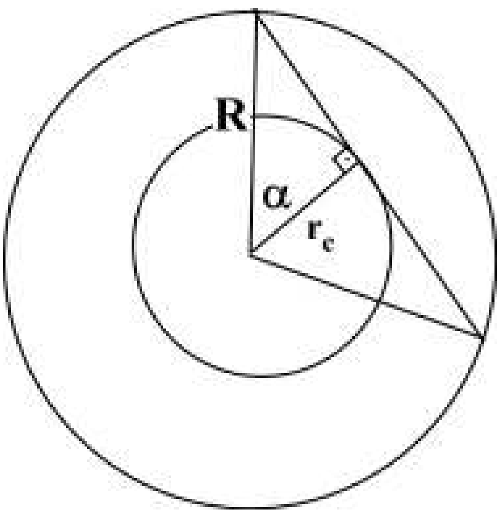
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v' \frac{\partial(-v_{st})}{\partial xt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(v'(-v_s)) = v'' v_s^2$$

Bunu türetilmiş denklem yerine koyarsak, $v'' v_s^2 = \frac{\mu}{\rho} v''$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

6.

$\alpha = \frac{103}{2} = 51.5°$ R=6371 km



Ana trigonometri bağıntılarını kullanarak;

$cos\alpha = \frac{r_c}{R} \Rightarrow r_c = Rcos\alpha$

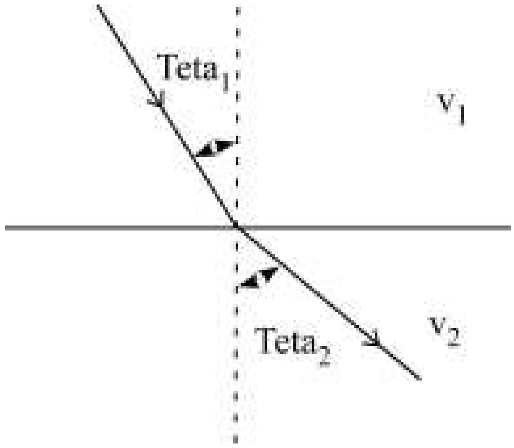
$r_c = 3966\ km$

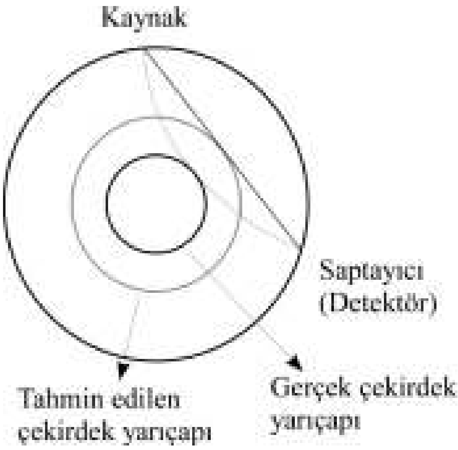
Yeryuvarı'nın gerçek çekirdek yarıçapı yaklaşık olarak 3400 km'dir. Dolayısıyla bizim tahminimiz çok büyük. Bunun nedeni vp yi mantoda tekdüze almış olmamızdır. Aslına bakılırsa, vp mantoda derinliğe bağlı olarak artmaktadır.

Snell Yasası’na göre ışın değişik vp’li bir sınırdan geçerse kırılmaktadır. Bizim örneğimizde,

$V_2 > v_1 \rightarrow \theta_2 > \theta_2$’dir.

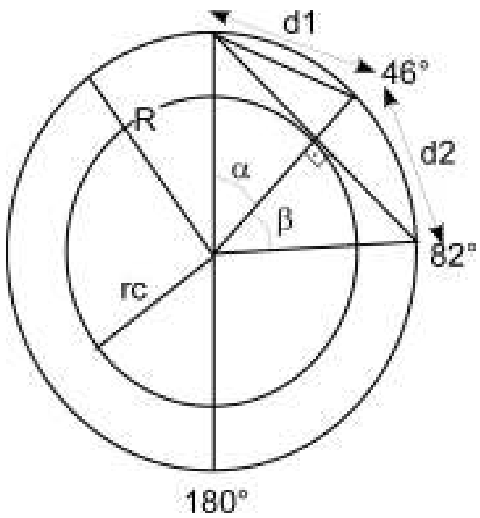
$$\frac{v_1}{sin\theta_1} = \frac{v_2}{sin\theta_2}$$





Bu durum ışınların düzgün çizgiler (doğrular) değilde, yukarıya doğru konkav olmasına neden olmaktadır. Eğer ışınlar doğru değilde, eğri iseler, bir ışın çekirdek-manto sınırının daha derin olmasından, belirli bir kritik açıda saptanır.

6. Mantodaki ışın çığırları (yolcukları)



$$sin\alpha = \frac{d_1/2}{R} \Rightarrow d_1 = 2Rsin\alpha$$

$$\alpha = \frac{46}{2}$$

R=200 km, d_1=1562.9 km

$$sin\beta = \frac{\frac{d_2}{2}}{R} \Rightarrow d_2 = 2Rsin\beta$$

$$\beta = \frac{82}{2}$$

d_2=2624.2 km

Mantodaki P-dalga hızı

$v_p = \frac{d_1}{t_1} = \frac{1562.9\ km}{312\ s}$ =5.0094 km/s

$$v_p = \frac{d_2}{t_2} = \frac{2624.2\ km}{525\ s} = 4.9985\ km/s$$

$$v_p = 5.00\ km/s$$

Çekirdek yarıçapı (83°'lik kritik açılı önceki probleme benzer olarak)

$$r_c = R cos \frac{83}{2}$$

$$r_c = 1497.9\ km$$

Çekirdekteki P-dalga hızı

Gezegen merkezinden geçen ve episentırın antipolerinde saptanan PKP ışını, 2rc çekirdekten vc hızıyla ve vm=5 km/s lik hızla 2R-2rc'lik mantoda ilerlemekte ve bu da yaklaşık 300 s sürmektedir.

$$\frac{2r_c}{v_c} \# + \frac{2R - 2r_c}{v_m} = t$$

$$\frac{v_m t - 2R + 2r_c}{v_m} = \frac{2r_c}{v_c}$$

$$v_c = \frac{2r_c v_m}{v_m t - 2Rt2r_c} = \frac{2995.8\ km 5.00 km/s}{500 \frac{km}{s} 300s - 1004.2\ km} = 30.2\ km/s$$

Bu gezegen katı bir çekirdeğe sahip olmalıdır. Çünkü 30 km/s lik bir P-dalgası ilerleme hızı ancak katı maddelerde mümkündür.